

بررسی تغییر شکل ورق دایروی در اثر اعمال بار متمرکز

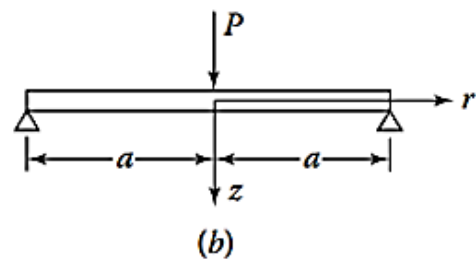
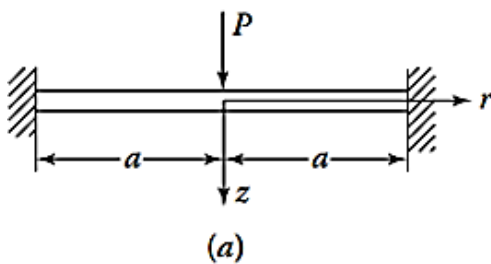
خیز یک ورق دایروی با بار متمرکز در مرکز را یک بار برای تکیه گاه گیردار و بار دیگر برای تکیه گاه ساده بدست آورید.

الف) مسئله را به صورت تقارن محوری مدل کرده و نتایج را با حل تئوری مقایسه نمایید.

ب) همین نتایج را برای بارهای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ نیوتن بدست آورده و با مقدار تئوری مقایسه نمایید. بررسی کنید چرا با افزایش بار، تغییر مکان در حالت تئوری با آباکوس متفاوت می باشد.

داده‌ها:

$$a = 1 \text{ m}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad E = 200 \text{ GPa}, \quad t = 0.01 \text{ m}, \quad P_0 = 1 \text{ N}$$



شکل ۱: هندسه و شرایط بارگذاری در ورق دایروی الف) تکیه گاه گیردار، ب) تکیه گاه ساده

« حل تئوری »

رابطه خیز در ورق دایروی:

معادله خیز در یک ورق با بار گسترده P به صورت زیر می باشد:

$$w = \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int \frac{rp}{D} dr dr dr dr. \quad (1)$$

با چهار بار انتگرال گیری از رابطه فوق خیز ورق بدست می آید:

$$w = w_b + w_p = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 + \frac{p_0 r^4}{64 D} \quad (2)$$

در معادله فوق w_h حل عمومی که شامل چهار جمله اول و w_p حل خصوصی مسئله می باشد. r شعاع ورق، p_0 بار گسترده یکنواخت و D سختی خمشی ورق نام دارد که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

در این رابطه E مدول یانگ، t ضخامت ورق و ν ضریب پواسون می باشد. مقدار D با قرار دادن مقادیر داده شده 187.03 بدست می آید.

شرایط مرزی برای ورق با تکیه گاه ساده:

$$w = 0 \quad M_r = 0 \quad (r = a)$$

شرایط مرزی برای ورق با تکیه گاه گیردار:

$$w = 0 \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad (r = a)$$

محاسبه خیز ورق در شرایط تکیه گاه گیردار:

با توجه به اینکه تغییر مکان در $r = 0$ باید محدود باشد مقدار c_1 در معادله ۲ باید صفر شوند. از طرفی چون نیروی گسترده ای وجود ندارد عبارت P_0 هم برابر صفر خواهد شد. به این ترتیب معادله خیز ورق به شکل زیر ساده می شود:

$$w = c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 \quad (4)$$

از شرط مرزی ارائه شده برای این ورق ها روابط زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} c_2 a^2 \ln a + c_3 a^2 + c_4 &= 0 \\ c_2 a (2 \ln a + 1) + 2c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

یک شرط اضافه دیگر برای محاسبه هر سه ثابت وجود دارد که در آن نیروی برشی Q_r باید برابر با $-\frac{P}{2\pi r}$ باشد:

$$\frac{4D}{r} c_2 = \frac{P}{2\pi r} \quad (6)$$

با حل معادلات ۵ و ۶ هر سه ثابت به صورت زیر بدست می آید.

$$c_2 = \frac{P}{8\pi D} \quad c_3 = -\frac{P}{16\pi D} (2 \ln a + 1) \quad c_4 = \frac{Pa^2}{16\pi D} \quad (7)$$

به این ترتیب معادله خیز ورق به صورت زیر بدست می آید:

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left(2r^2 \ln \frac{r}{a} + a^2 - r^2 \right) \quad (8)$$

با توجه به اینکه خیز در وسط ورق بیشترین مقدار خود را دارد با قرار دادن $r = 0$ مقدار خیز ماکزیمم به صورت زیر بدست می آید:

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{16\pi D} \quad (9)$$

با قرار دادن مقادیر عددی در معادله فوق مقدار خیز ماکزیمم برابر 1.06×10^{-3} میلی متر بدست می آید.

رابطه تنش محیطی و شعاعی بر حسب خیز ورق در زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right)\end{aligned}\quad (10)$$

با قرار دادن خیز در معادله فوق مقدار تنش محیطی و شعاعی بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3Pz}{\pi t^3} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{3Pz}{\pi t^3} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right]\end{aligned}\quad (11)$$

محاسبه خیز ورق در شرایط تکیه گاه ساده:

با در نظر گرفتن شرایط مرزی مربوط به تکیه گاه ساده می توان خیز و تنش را در داخل ورق به صورت زیر بدست آورد:

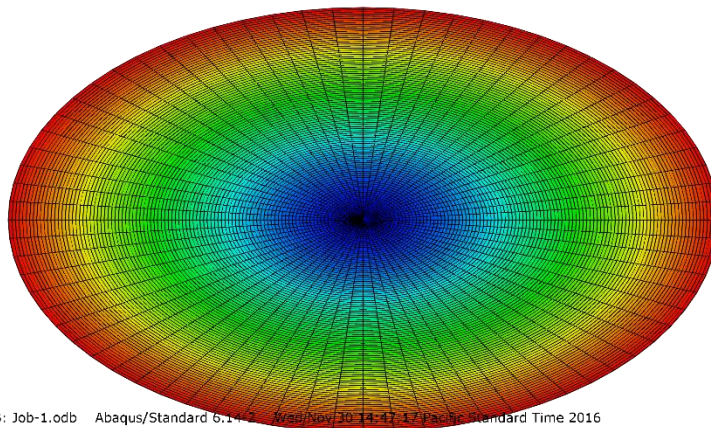
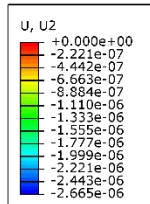
$$\begin{aligned}w &= \frac{P}{16\pi D} \left[2r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) \right] \\ \sigma_r &= \frac{3Pz}{\pi t^3} (1+\nu) \ln \frac{a}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{3Pz}{\pi t^3} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu \right]\end{aligned}\quad (12)$$

با قرار دادن $r = 0$ خیز ماکزیمم ورق در وسط محاسبه می شود:

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{16\pi D} \frac{3+\nu}{1+\nu} \quad (13)$$

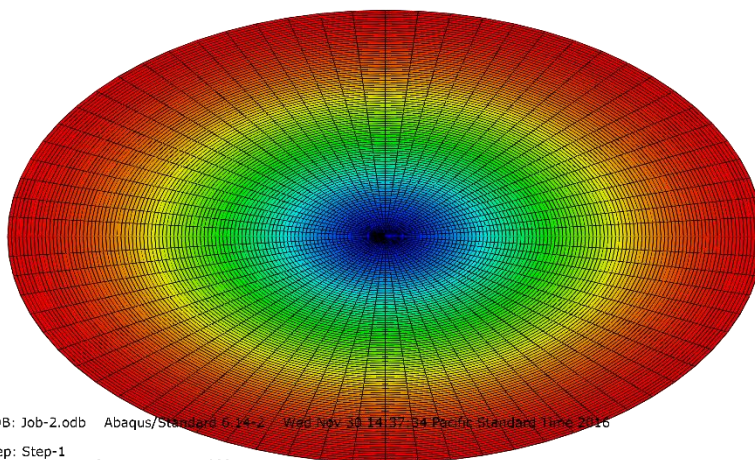
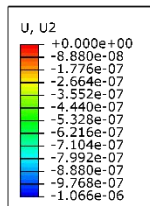
با قرار دادن مقادیر عددی در معادله فوق خیز در وسط ورق 2.66×10^{-3} میلیمتر بدست می آید.

« حل اجزاء محدود »



ODB: Job-1.odb Abaqus/Standard 6.14-2 Wed Nov 30 14:47:17 Pacific Standard Time 2016

Step: Step-1
Increment 1: Step Time = 1.000
Primary Var: U, U2
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.000e+00



ODB: Job-2.odb Abaqus/Standard 6.14-2 Wed Nov 30 14:37:34 Pacific Standard Time 2016

Step: Step-1
Increment 1: Step Time = 1.000
Primary Var: U, U2
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.000e+00

شکل ۴: کانتور تغییر مکان الف) تکیه گاه ساده، ب) تکیه گاه گیردار