

محاسبه ضریب شدت تنش K_{II} ، میدان تنش و تغییر مکان در مد دوم بارگذاری

یک ورق با ترک مرکزی به طول $2a$ مطابق شکل ۱ در نظر گرفته و با توجه به شرایط زیر آن را در نرم افزار آباکوس مدل کنید:

داده‌ها:

طول ترک a : ۱۰ میلیمتر

ابعاد ورق مربعی: ۱۰۰ میلیمتر

مدول یانگ: ۲۰۰۰۰۰ مگاپاسکال

ضریب پواسون: ۰/۳

تنش برشی در دور دست: ۱ مگاپاسکال

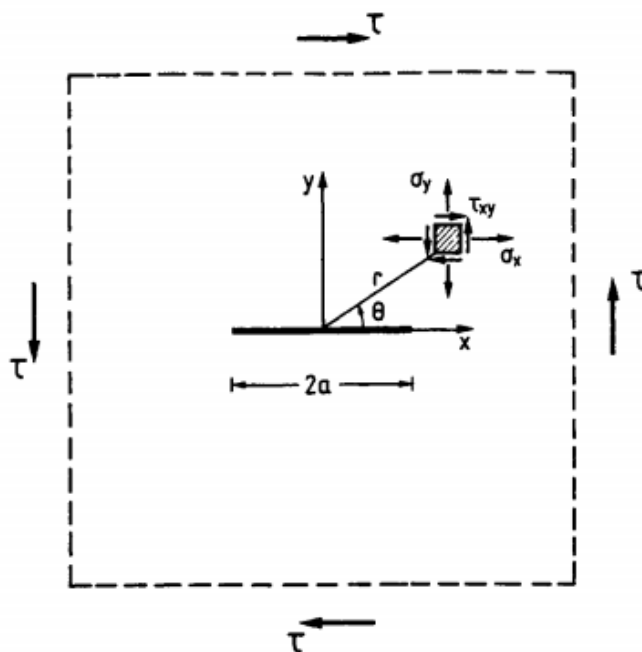
مطلوبست موارد زیر:

۱- محاسبه مقادیر تنش‌ها در نوک ترک و مقایسه آن‌ها با مقادیر بدست آمده از حل وسترگارد (حل تئوری)

۲- محاسبه میدان تغییر مکان در نوک ترک

۳- ترسیم منحنی تنش در جلوی ترک

۴- مقایسه کانتور تنش مد اول و دوم با عکس‌های فتوالاستیک



شکل ۱: هندسه ورق با ترک مرکزی

Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering

Telegram: @FathiTrainingGroup

Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com

Website: FathiTrainingGroup.com

Tel: 09386249330 – 05136210687

Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran

« حل تئوری »

وسترگارد برای محاسبه تنش در نزدیکی نوک ترک تابع مختلط زیر را پیشنهاد کرد:

$$Z_{II} = -\frac{i\tau z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \quad z = x + jy \quad (1)$$

همین طور میدان تنش در مد دوم به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} \\ \sigma_y &= y \operatorname{Im} Z'_{II} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = -\operatorname{Im} Z_{II} - y \operatorname{Re} Z'_{II}$$

با قرار دادن معادله ۱ در ۲ می توان مقدار دقیق تنش ها را در نقاط مختلف ورق بدست آورد. قبل از محاسبه مقادیر تنش، ابتدا به اثبات چگونگی بدست آمدن آن ها می پردازیم. وسترگارد برای محاسبه تنش ها از تابع ایری استفاده کرد که می بایست در شرایط مرزی مسئله و معادله بای هارمونیک زیر صدق کند:

$$\nabla^2 \nabla^2 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (3)$$

در رابطه فوق U همان تابع تنش ایری است. مولفه های تنش برحسب این تابع به صورت زیر می باشند:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

اگر تابع U به فرم زیر انتخاب شود:

$$U = \psi_1 + x\psi_2 + y\psi_3 \quad (5)$$

که در آن توابع ψ_i ($i = 1, 2, 3$) هارمونیک هستند، یعنی:

$$\nabla^2 \psi_i = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

U به صورت خودکار در معادله بای هارمونیک صدق خواهد کرد.

برای مسائل متقارن (مد اول) که در جلسه دوم بحث شد، تابع U_1 توسط وسترگارد به صورت زیر تعریف شده است:

$$U_I = \text{Re } \tilde{Z}_I + y \text{ Im } \tilde{Z}_I \quad (7)$$

در مسئله مد دوم که پاد متقارن است، تابع U_2 همان بخش موهومی تابع U_1 می باشد:

$$U_{II} = y \text{ Im } \tilde{Z}_{II} \quad (8)$$

با استفاده از روابط توابع مختلط و معادلات کوشی - ریمان ارائه شده در زیر می توان توابع تنش و تغییر مکان را محاسبه کرد:

$$\tilde{Z} = \frac{d\tilde{Z}}{dz}, \quad Z = \frac{d\tilde{Z}}{dz}, \quad Z' = \frac{dZ}{dz} \quad \longrightarrow \quad \text{توابع مختلط} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \frac{dZ}{dz} &= \frac{\partial \text{Re } Z}{\partial x} = \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial y} \\ \text{Im } \frac{dZ}{dz} &= \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial x} = -\frac{\partial \text{Re } Z}{\partial y} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{توابع کوشی - ریمان}$$

توابع تنش و تغییر مکان به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \text{Re } Z_{II} - y \text{Im } Z'_{II} \\ \sigma_y &= y \text{Im } Z'_{II} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{توابع تنش} \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = -\text{Im } Z_{II} - y \text{Re } Z'_{II}$$

$$\begin{aligned} 2\mu u &= \frac{\kappa+1}{2} \text{Re } \tilde{Z}_{II} - y \text{Im } Z_{II} \\ 2\mu v &= \frac{\kappa-1}{2} \text{Im } \tilde{Z}_{II} - y \text{Re } Z_{II} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{توابع تغییر مکان} \quad (11)$$

برای آشنایی با نحوه بدست آوردن توابع تنش یک نمونه از آن ها را اثبات می کنیم:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = y \operatorname{Im} Z'_{II} \quad (12)$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{Im} \tilde{Z}_{II}) = y \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} \tilde{Z}_{II}) = y \operatorname{Im} \frac{d\tilde{Z}_{II}}{dz} = y \operatorname{Im} Z_{II}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{Im} Z_{II}) = y \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} Z_{II}) = y \operatorname{Im} \frac{dZ_{II}}{dz} = y \operatorname{Im} Z'_{II}$$

حال با جایگذاری تابع تنش وسترگارد معادله ۱ در معادلات ۱۰ و ۱۱ مقدار دقیق مولفه های تنش و تغییر مکان را می توان بدست آورد:

$$Z_{II} = -\frac{i\tau z}{(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad Z'_{II} = -\frac{i\tau(z^2 - a^2)^{1/2} - i\tau z^2(z^2 - a^2)^{-1/2}}{z^2 - a^2} \quad (13)$$

در صفحه ای که ترک وجود دارد یعنی $z = x$ و $y = 0$ و در بازه $-a < x < a$ توابع تنش به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$, \quad Z'_{II} = -\frac{-\tau(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \tau x^2(a^2 - x^2)^{-1/2}}{x^2 - a^2} Z_{II} = -\frac{\tau x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

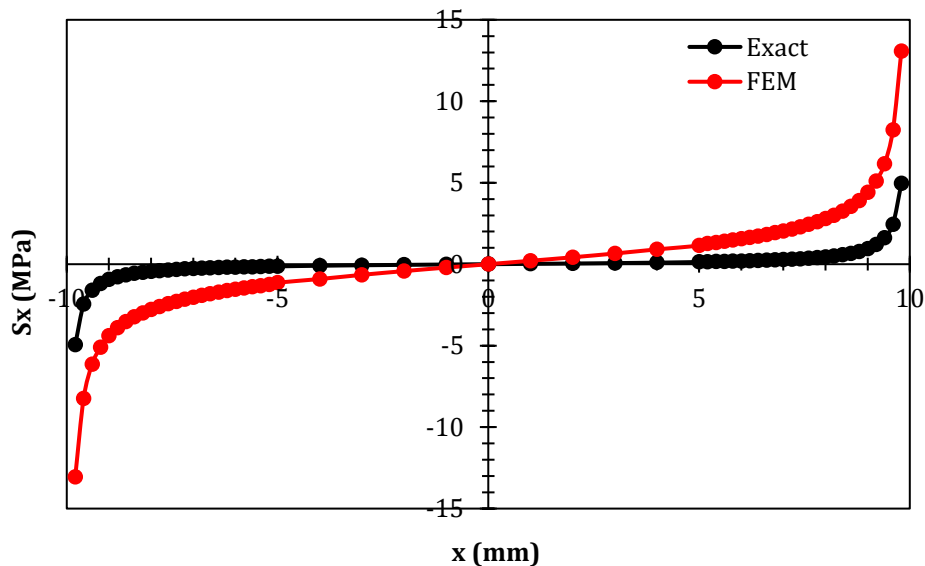
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} = -\frac{2\tau x}{a^2 - x^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = y \operatorname{Im} Z'_{II} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\operatorname{Im} Z_{II} - y \operatorname{Re} Z'_{II} = 0$$

روابط تنش در بازه $-a < x < a$

از سوی دیگر با مدلسازی هندسه فوق در نرم افزار آباکوس، می توان مقدار σ_x را در طول ترک بدست آورد و با مقدار تئوری معادله ۱۴ مقایسه کرد. شکل ۳ این منحنی ها را نشان می دهد.



شکل ۳: مقایسه منحنی توزیع σ_x در طول ترک

این توابع برای خارج بازه فوق به صورت زیر می باشند:

$$Z_{II} = -\frac{i\tau x}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad Z'_{II} = -\frac{i\tau(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - i\tau x^2(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2 - a^2} \quad (15)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2\text{Re}Z_{II} - y\text{Im}Z'_{II} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = y\text{Im}Z'_{II} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\text{Im}Z_{II} - y\text{Re}Z'_{II} = \frac{\tau x}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

روابط دقیق تنش خارج از بازه $-a < x < a$

وسترگارد با انتقال دستگاه مختصات از مرکز ترک به نوک آن از روابط فوق به معادلات زیر برای محاسبه تنش در نزدیکی نوک ترک دست یافت. با توجه به اینکه این روابط با کمی تقریب از معادله ۱۵ استخراج شده‌اند، مقادیر بدست آمده برای تنش با استفاده از این حل کمی با مقدار دقیق اختلاف دارد.

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

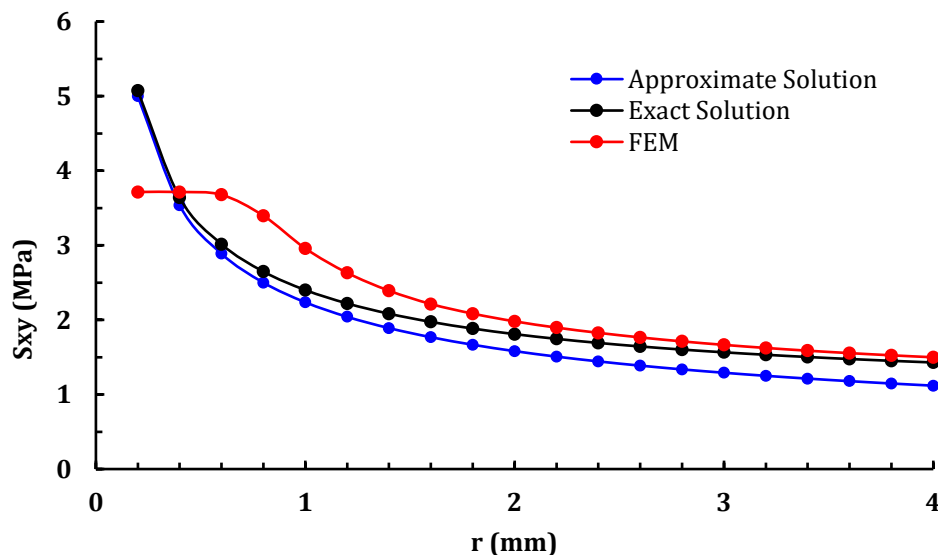
$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

(۱۶) روابط تقریبی تنش خارج از بازه $-a < x < a$ و در نزدیکی نوک ترک

در این روابط K_{II} ضریب شدت تنش در مد دوم، r فاصله از نوک ترک و θ زاویه در نوک ترک می‌باشد. با استفاده از رابطه زیر می‌توان ضریب شدت تنش در مد دوم را محاسبه کرد:

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (۱۷)$$

در شکل ۴ توزیع τ_{xy} در جلوی ترک حاصل از حل های مختلف مقایسه شده اند.



شکل ۴: مقایسه منحنی توزیع تنش برشی در جلوی ترک

با استفاده از روابط زیر می توان مقدار دقیق تغییر مکان را در جلوی ترک و روی ترک بدست آورد:

$$Z_{II} = \frac{d\tilde{Z}}{dz} = -\frac{itz}{(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{Z}_{II} = -i\tau(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$\text{For } -a < x < a: \quad Z_{II} = -\frac{\tau x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{Z}_{II} = \tau(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{For } x < -a, x > a: \quad Z_{II} = -\frac{itx}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{Z}_{II} = -i\tau(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$2\mu u = \frac{\kappa + 1}{2} \text{Re}\tilde{Z}_{II} - y \text{Im}Z_{II} \rightarrow \begin{cases} \text{For } -a < x < a \rightarrow 2\mu u = \frac{\kappa + 1}{2} \tau(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \\ \text{For } x < -a, x > a \rightarrow 2\mu u = 0 \end{cases}$$

$$2\mu v = \frac{\kappa - 1}{2} \text{Im}\tilde{Z}_{II} - y \text{Re}Z_{II} \rightarrow \begin{cases} \text{For } -a < x < a \rightarrow 2\mu v = 0 \\ \text{For } x < -a, x > a \rightarrow 2\mu v = -\frac{\kappa - 1}{2} \tau(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

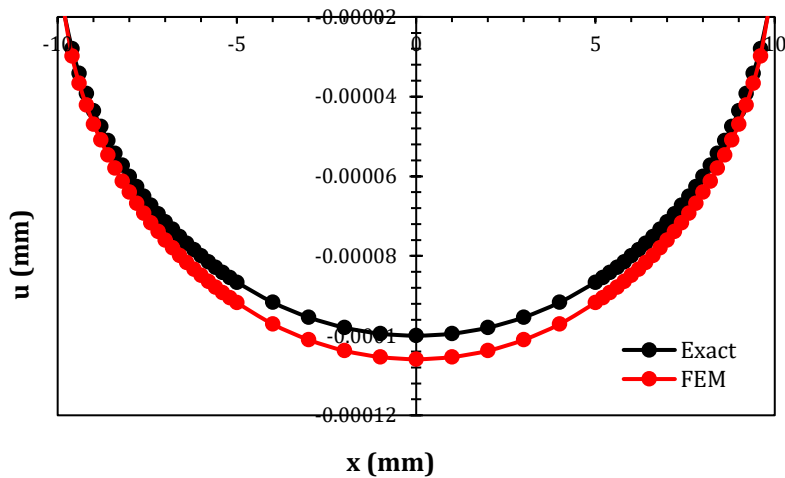
تذکر: برای شرایط تنش صفحه ای $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ و برای شرایط کرنش صفحه ای $\kappa = 3 - 4\nu$ می باشد.

همچنین، از روابط زیر می توان برای محاسبه مقدار تقریبی تغییر مکان در جلوی ترک استفاده کرد:

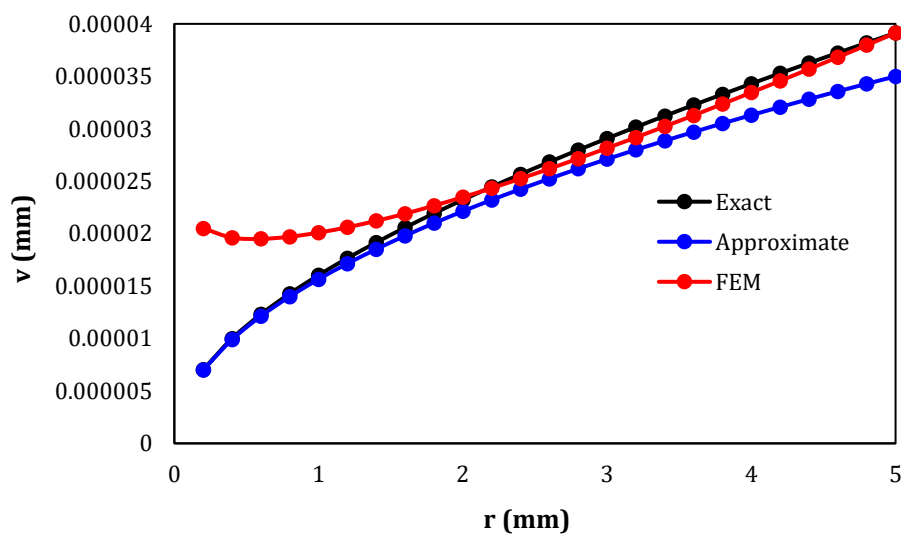
$$u = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \quad (18)$$

$$v = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta)$$

با استفاده از روابط فوق می توان منحنی تغییر مکان را روی ترک و در جلوی آن بدست آورد. شکل های ۵ این منحنی را به ترتیب روی ترک و در جلوی آن نشان می دهد:

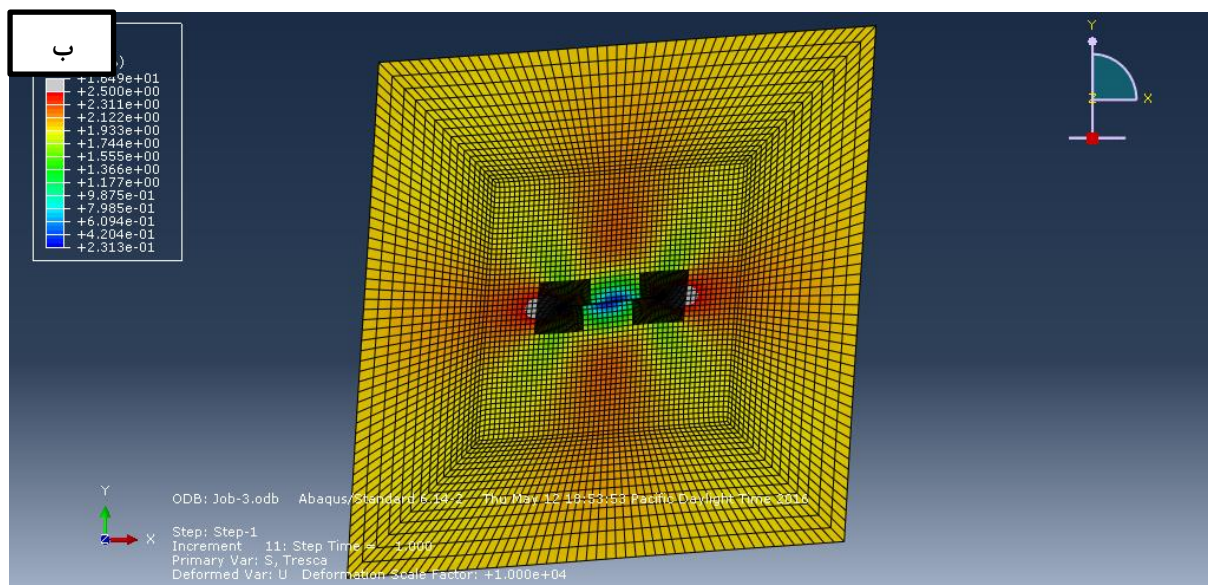
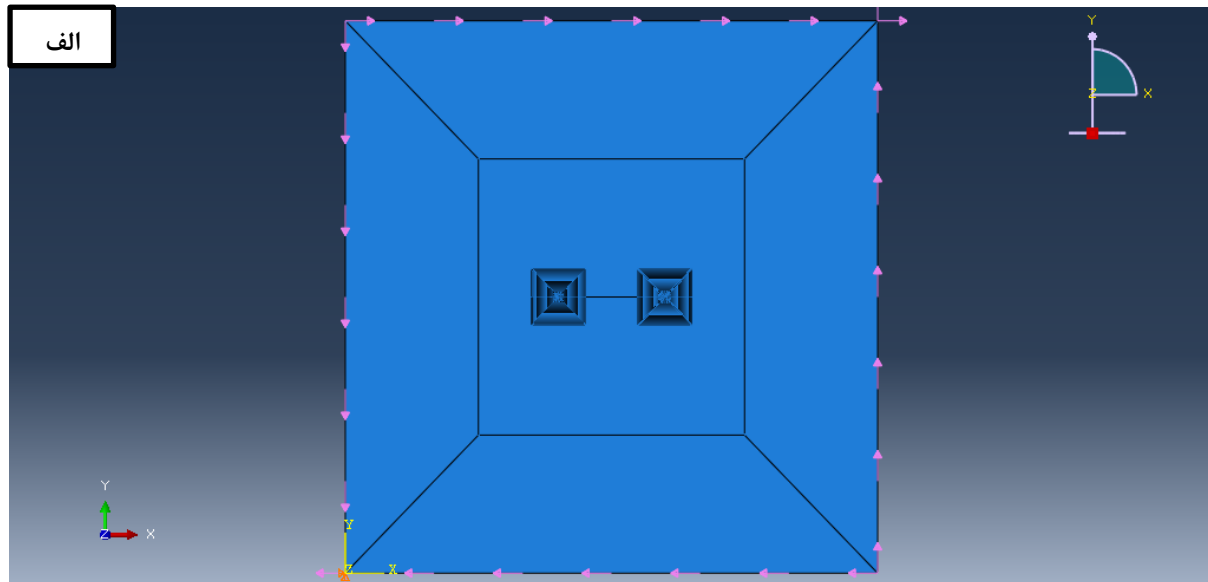


شکل ۵: مقایسه منحنی تغییر مکان راستای X در روی ترک



شکل ۶: مقایسه منحنی تغییر مکان راستای Y در جلوی ترک

« حل اجزاء محدود »



شکل ۷: نمایش بخش هایی از مدل سازی الف) بارگذاری، ب) کانتور تنش ترسکا با بزرگنمایی ۱۰۰۰۰ برابر

Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering

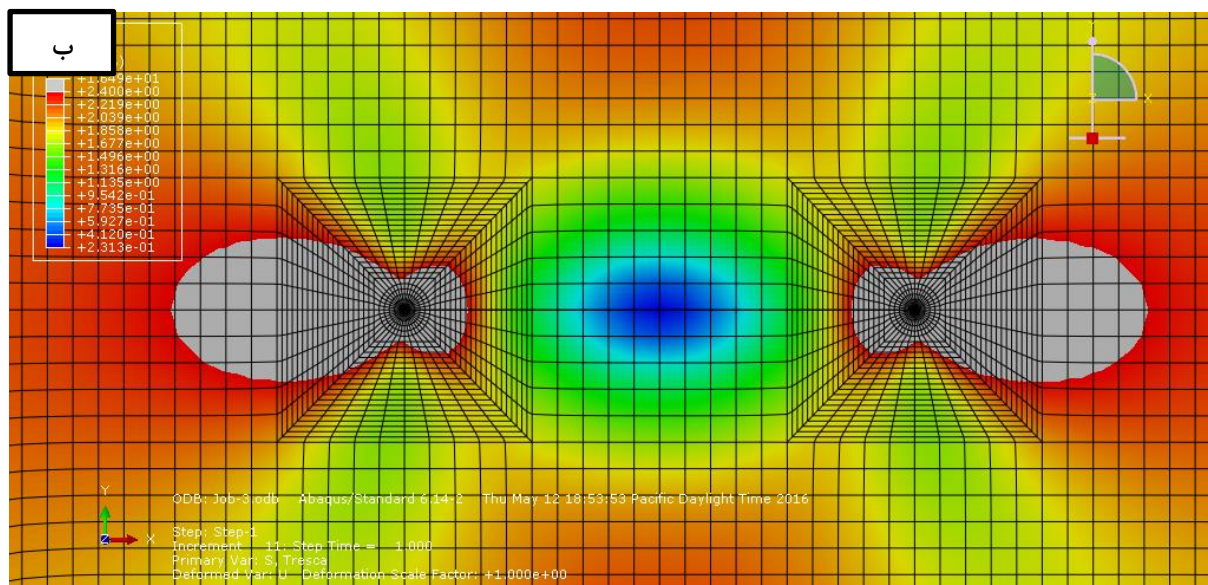
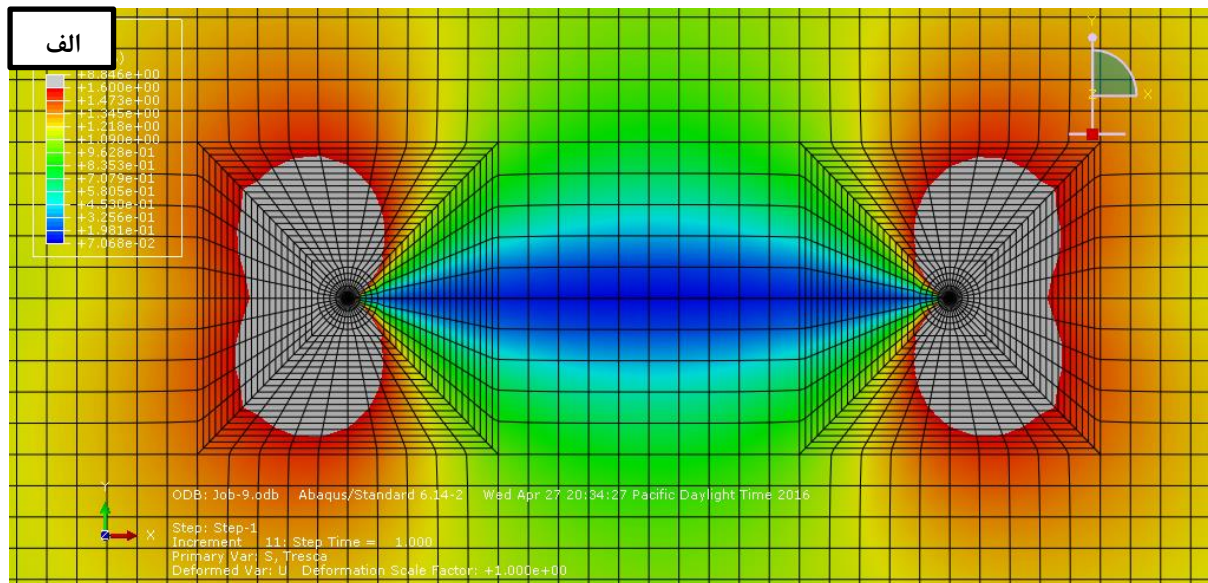
Telegram: @FathiTrainingGroup

Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com

Website: FathiTrainingGroup.com

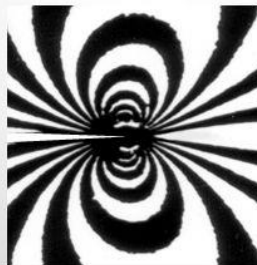
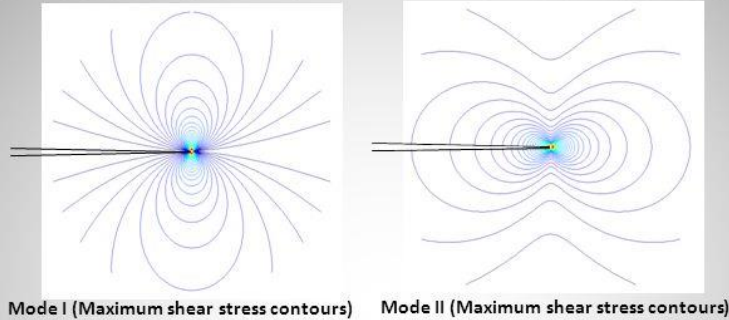
Tel: 09386249330 – 05136210687

Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran



شکل ۸: نمایش کانتورهای تنش در نزدیکی نوک ترک برای (الف) مد اول بارگذاری، (ب) مد دوم بارگذاری

Crack Problem Results Contours of Maximum Shear Stress



Experimental Photoelastic Isochromatics
Courtesy of URI Dynamic Photomechanics Laboratory

Elasticity Theory, Applications and Numerics
M.H. Sadd, University of Rhode Island



شکل ۹: نمایش کانتور بیشترین تنش برشی در مد اول و دوم بارگذاری به روش فتوالاستیک