

جلسه هفتم بررسی خیز و توزیع تنش در یک ورق مستطیلی بسیار طویل

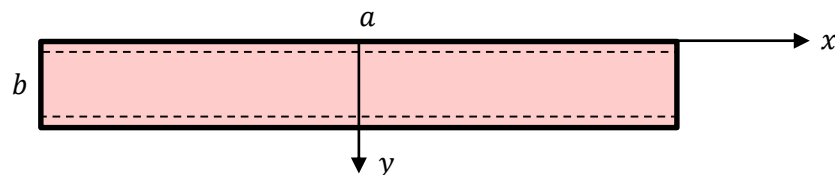
خیز و تنش را در یک ورق مستطیلی بسیار طویل و کم عرض، که به آن باریکه بینهایت می گویند حساب کنید. لبه های $y = 0$ و $y = b$ مطابق شکل ۱ روی تکیه گاه ساده قرار گرفته است و ورق بار غیر یکنواخت زیر را تحمل می کند.

$$p(y) = P_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

در ادامه مقدار بار را یکنواخت و برابر P_0 فرض کنید و نتایج را با حالت قبل مقایسه نمایید.

داده ها:

$$P_0 = 10 \text{ kPa}, \quad b = 0.4 \text{ m}, \quad a = 10 \text{ m}, \quad \vartheta = \frac{1}{3}, \quad E = 200 \text{ GPa}, \quad t = 0.01 \text{ m},$$



شکل ۱: هندسه ورق مستطیلی طویل

« حل تئوری »

معادلات خمشی در ورق:

برای حل این ورق از رابطه گشتاور خمشی حول محور X و Y استفاده می‌شود. این گشتاور به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} M_x &= -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\kappa_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

عبارت D سختی خمشی ورق نام دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

در این روابط D سختی خمشی ورق، E مدول یانگ، t ضخامت ورق، θ ضریب پواسون، w خیز و k انحنای ورق می‌باشد. مقدار D با قرار دادن مقادیر داده شده ۱۸۷۵۰ بدست می‌آید.

شرایط مرزی برای ورق با تکیه گاه ساده:

با توجه به طول بودن ورق شیب آن پس از تغییر شکل در راستای X برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

همچنین شرط مرزی در دو لبه پایینی و بالایی ورق ($y = b$ و $y = 0$) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

محاسبه خیز ورق:

با قرار دادن شرایط مرزی فوق در معادلات ۱، M_x و M_y به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$M_x = -\nu D \frac{d^2 w}{dy^2} \quad M_y = -D \frac{d^2 w}{dy^2} \quad (3)$$

رابطه کلی برای محاسبه خیز ورق‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{p}{D} \quad (4)$$

با چهار بار انتگرال گیری از این معادله و قرار دادن شرایط مرزی در آن می‌توان خیز ورق را محاسبه کرد. بنابراین داریم:

$$w = \left(\frac{b}{\pi}\right)^4 \frac{p_0}{D} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (5)$$

در این رابطه P_0 فشار حداکثر می‌باشد. با قرار دادن $y = b/2$ مقدار ماکزیمم خیز در وسط ورق برابر 1.40×10^{-4} بدست می‌آید.

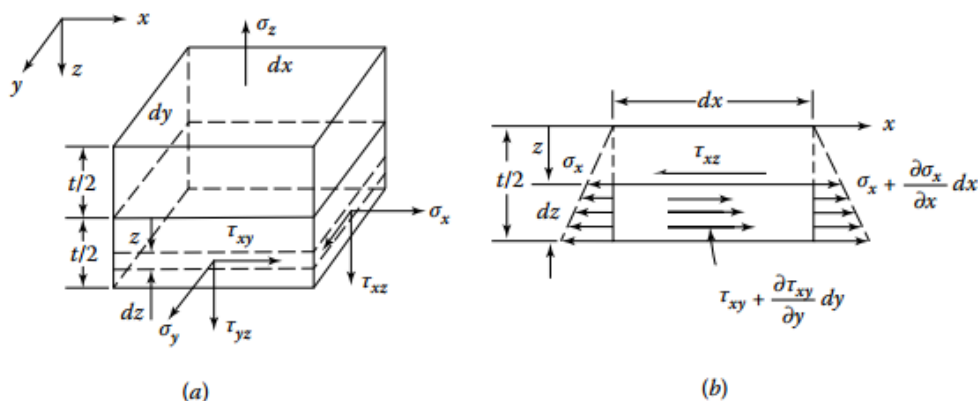
با قرار دادن معادله ۵ در ۳ می‌توان گشتاور خمشی را حساب کرد. از این گشتاورها در محاسبه تنش به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3} \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3} \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3} \quad (6)$$

با توجه به این رابطه بیشترین مقدار تنش در $z = \pm \frac{t}{2}$ رخ می‌دهد. توزیع تنش در شکل ۲ برای یک المان ورق نشان داده شده است. با قرار دادن مقدار Z در معادله ۶ بیشترین مقدار تنش در وسط ورق و در سطوح آزاد بدست می‌آید:

$$\sigma_{x,\max} = 0.2 p_0 \left(\frac{b}{t}\right)^2 \quad \sigma_{y,\max} = 0.6 p_0 \left(\frac{b}{t}\right)^2 \quad \left(z = \frac{t}{2}, y = \frac{b}{2}\right) \quad (7)$$

با قرار دادن مقادیر در معادله ۷، بیشترین تنش در راستای X و Y به ترتیب برابر ۳٫۲ و ۹٫۶ مگاپاسکال در وسط ورق بدست می‌آید. این تنش‌ها مطابق شکل ۲ در تار خنثی یعنی $z = 0$ برابر صفر می‌باشند.



شکل ۲: نمایش توزیع تنش در یک ورق

همچنین، می‌توان سایر تنش‌ها را از روابط زیر محاسبه کرد.

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right]$$

$$\tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$\sigma_z = -\frac{3p}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{t} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{t} \right)^3 \right]$$

مطابق این روابط مقدار تنش σ_z در $z = -t/2$ بیشترین مقدار خود را دارد در حالیکه توزیع تنش برشی در این فاصله از تار خنثی به دلیل قرارگیری روی سطح آزاد برابر صفر خواهد بود.

$$\sigma_z = -P_0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

محاسبه خیز ورق با در نظر گرفتن بار گسترده یکنواخت:

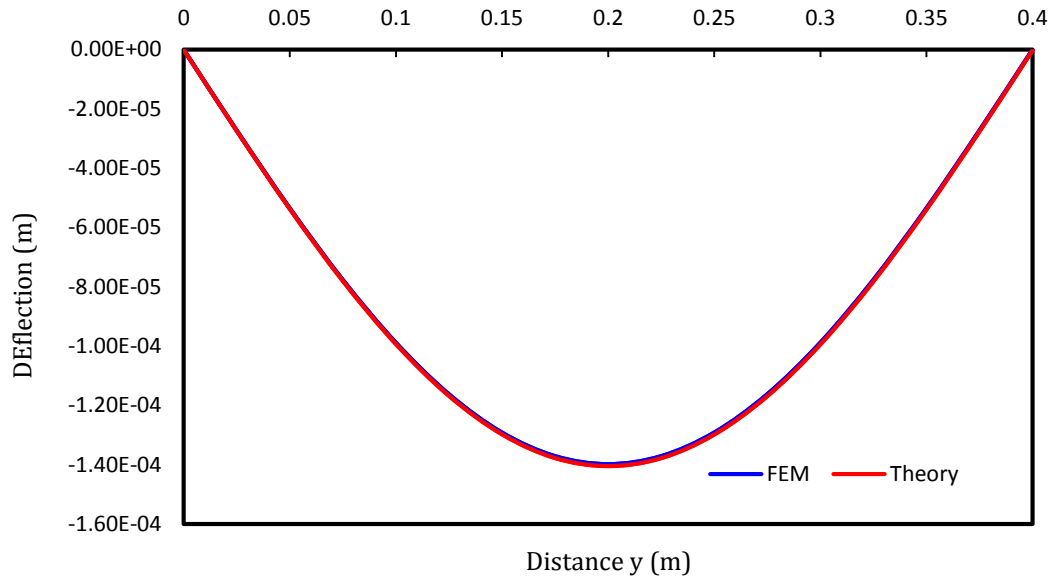
چنانچه بار ثابت و یکنواخت در نظر گرفته شود، از معادله ۴ با در نظر گرفتن $p = p_0$ چهار بار انتگرال گرفته می‌شود. در این صورت با اعمال شرایط مرزی خیز ورق به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$w = \frac{p_0 b^4}{24D} \left(\frac{y^4}{b^4} - 2 \frac{y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \right) \quad (9)$$

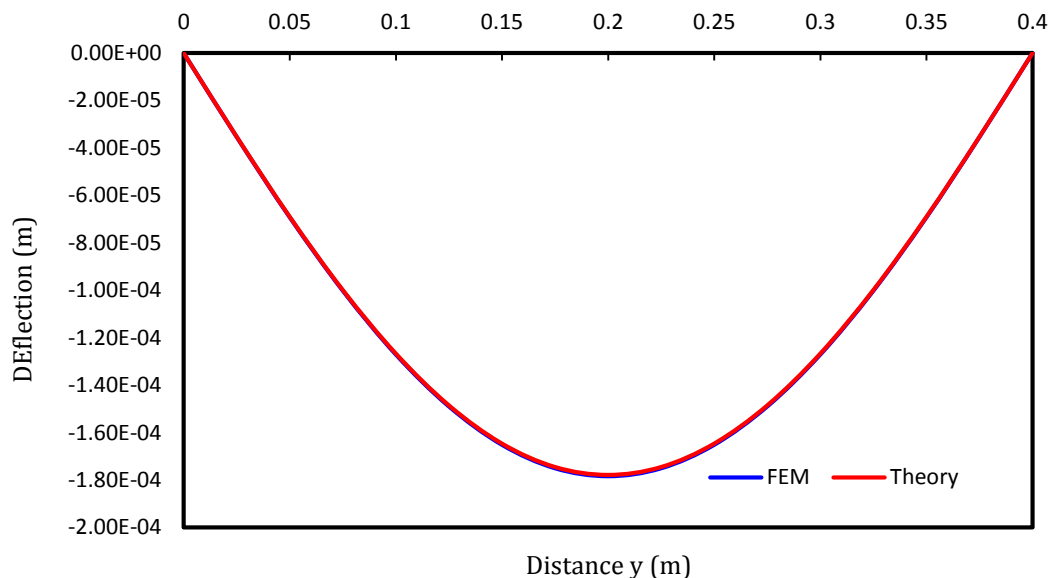
در رابطه فوق با قرار دادن $y = \frac{b}{2}$ بیشترین مقدار خیز در وسط ورق بدست می‌آید.

$$w_{max} = \frac{5p_0 b^4}{384D} = 1.70 \times 10^{-4} \text{ m}$$

« مقایسه نتایج تئوری و عددی »

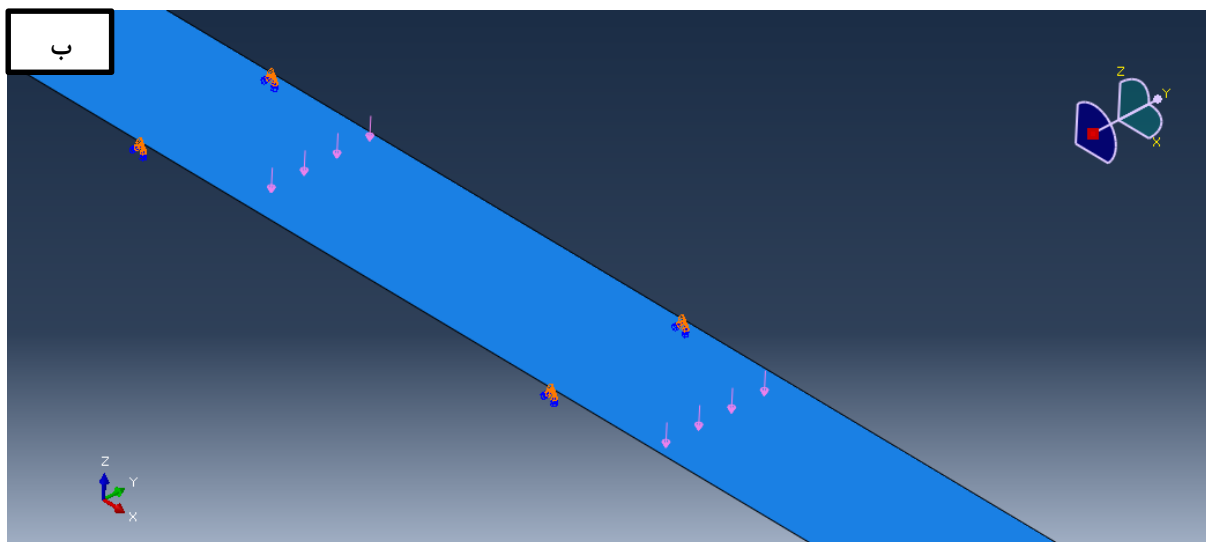
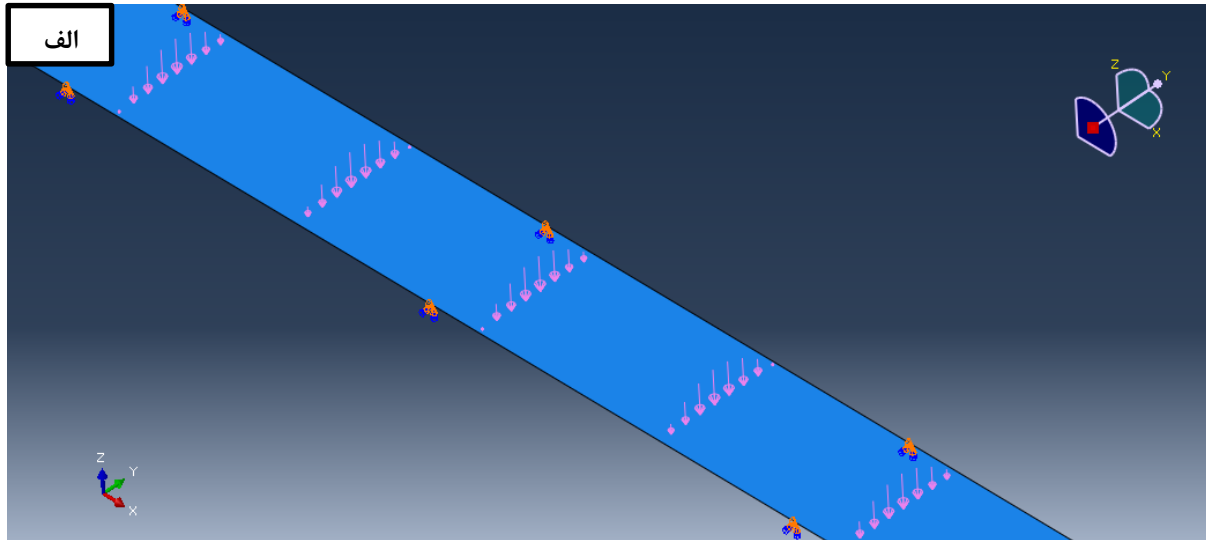


شکل ۳: مقایسه منحنی خیز تیر در راستای محور y برای بارگذاری سینوسی



شکل ۴: مقایسه منحنی خیز تیر در راستای محور y برای بارگذاری یکنواخت

« حل اجزاء محدود »



شکل ۵: نمایش بارگذاری الف) بارگذاری سینوسی، ب) بارگذاری یکنواخت