

بررسی تغییر شکل ورق دایروی در اثر اعمال بار گسترده

ورق دایروی نشان داده شده در شکل ۱ را یک بار با شرایط تکیه گاهی ساده و بار دیگر با شرایط تکیه گاهی گیردار مدل کنید. مطلوب است:

الف) محاسبه بیشترین خیز ورق در هر دو حالت

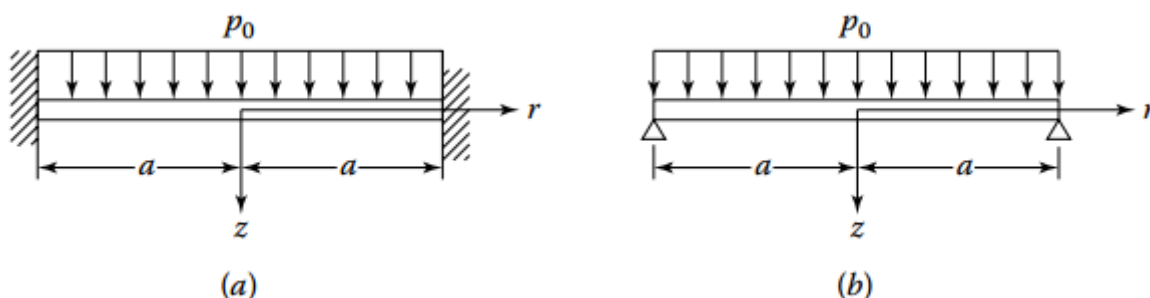
ب) ترسیم منحنی تنش های شعاعی و محیطی در تکیه گاه

ج) ترسیم منحنی خیز ورق در راستای شعاعی

مسئله را یک بار به صورت تقارن محوری و بار دیگر به صورت سه بعدی مدل کرده و نتایج را با یکدیگر مقایسه نمایید.

داده ها:

$$a = 1 \text{ m}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad E = 200 \text{ GPa}, \quad t = 0.01 \text{ m}, \quad P_0 = 1000 \text{ Pa}$$



شکل ۱: هندسه و شرایط بارگذاری در ورق دایروی الف) تکیه گاه گیردار، ب) تکیه گاه ساده

« حل تئوری »

رابطه خیز در ورق دایروی:

معادله خیز در یک ورق با بار گسترده P به صورت زیر می باشد:

$$w = \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int \frac{rp}{D} dr dr dr dr. \quad (1)$$

با چهار بار انتگرال گیری از رابطه فوق خیز ورق بدست می آید:

$$w = w_b + w_p = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 + \frac{p_0 r^4}{64 D} \quad (2)$$

در معادله فوق w_h حل عمومی که شامل چهار جمله اول و w_p حل خصوصی مسئله می باشد. r شعاع ورق، p_0 بار گسترده یکنواخت و D سختی خمشی ورق نام دارد که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

در این رابطه E مدول یانگ، t ضخامت ورق و ν ضریب پواسون می باشد. مقدار D با قرار دادن مقادیر داده شده 18703 بدست می آید.

شرایط مرزی برای ورق با تکیه گاه ساده:

$$w = 0 \quad M_r = 0 \quad (r = a)$$

شرایط مرزی برای ورق با تکیه گاه گیردار:

$$w = 0 \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad (r = a)$$

محاسبه خیز ورق در شرایط تکیه گاه ساده:

با توجه به اینکه تغییر مکان در $r = 0$ باید محدود باشد مقادیر c_1 و c_2 در معادله ۲ باید صفر شوند. از شرط مرزی ارائه شده برای این ورق ها استفاده کرده و ضرایب c_3 و c_4 را بدست می آوریم. برای این منظور داریم:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (4)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right)$$

با قرار دادن $r = 0$ در معادلات ۲ و ۴ ضرایب c_3 و c_4 را بدست می آوریم:

$$c_3 a^2 + c_4 + \frac{p_0 a^4}{64 D} = 0 \quad c_3 = -\frac{p_0 a^2}{32 D} \frac{3+\nu}{1+\nu}$$

$$c_4 = p_0 a^4 (5+\nu) / 64(1+\nu) D$$

نهایتا تغییر شکل ورق به صورت زیر محاسبه می شود:

$$w = \frac{p_0 a^4}{64 D} \left(\frac{r^4}{a^4} - 2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{r^2}{a^2} + \frac{5+\nu}{1+\nu} \right) \quad (6)$$

در ادامه می توان لنگرهای خمشی شعاعی و محیطی را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$M_r = \frac{p_0}{16} (3+\nu) (a^2 - r^2) \quad (7)$$

$$M_\theta = \frac{p_0}{16} [(3+\nu) a^2 - (1+3\nu) r^2]$$

از رابطه فوق تنش های شعاعی و محیطی بدست می آیند:

$$\sigma_r = \frac{3 p_0 z}{4 t^3} (3+\nu) (a^2 - r^2) \quad (8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 p_0 z}{4 t^3} [(3+\nu) a^2 - (1+3\nu) r^2]$$

محاسبه خیز ورق در شرایط تکیه گاه گیردار:

مشابه حالت قبل ضرایب C_1 و C_2 باید برابر صفر باشند. برای محاسبه سایر ضرایب از شرط مرزی گیردار استفاده می کنیم. به این ترتیب ضرایب C_3 و C_4 به صورت زیر بدست می آیند:

$$c_3 = -\frac{p_0 a^2}{32 D} \quad c_4 = \frac{p_0 a^4}{64 D} \quad (9)$$

از جایگذاری ثوابت فوق در معادله ۲ تغییر شکل ورق بدست می آید:

$$w = \frac{p_0}{64 D} (a^2 - r^2)^2 \quad (10)$$

با قرار دادن $r = 0$ خیز ماکزیمم ورق در وسط محاسبه می شود:

$$w_{\max} = \frac{p_0 a^4}{64 D}$$

با قرار دادن مقادیر خیز در وسط ورق 8.35×10^{-4} متر بدست می آید. در ادامه می توان لنگرهای خمشی شعاعی و محیطی را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$M_r = \frac{p_0}{16} [(1+\nu) a^2 - (3+\nu) r^2] \quad (11)$$

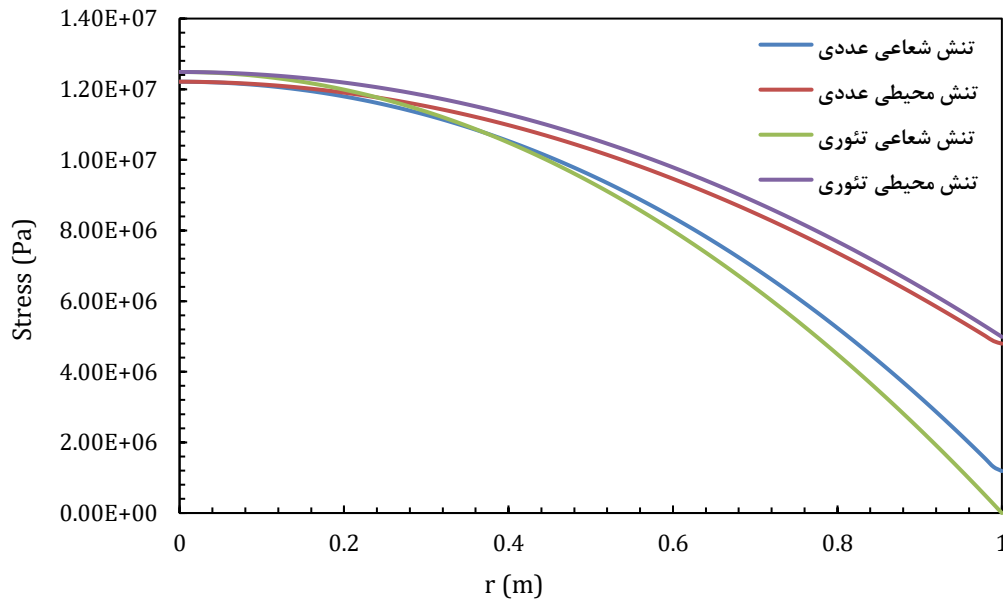
$$M_\theta = \frac{p_0}{16} [(1+\nu) a^2 - (1+3\nu) r^2]$$

از رابطه فوق تنش های شعاعی و محیطی بدست می آیند:

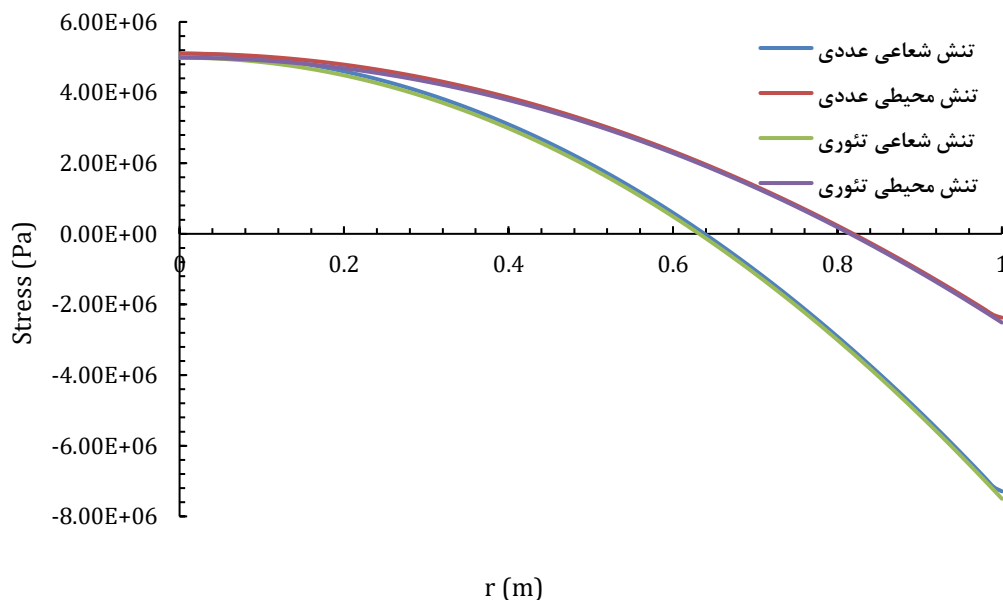
$$\sigma_r = \frac{3 p_0 z}{4 t^3} [(1+\nu) a^2 - (3+\nu) r^2] \quad (12)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 p_0 z}{4 t^3} [(1+\nu) a^2 - (1+3\nu) r^2]$$

« مقایسه نتایج »

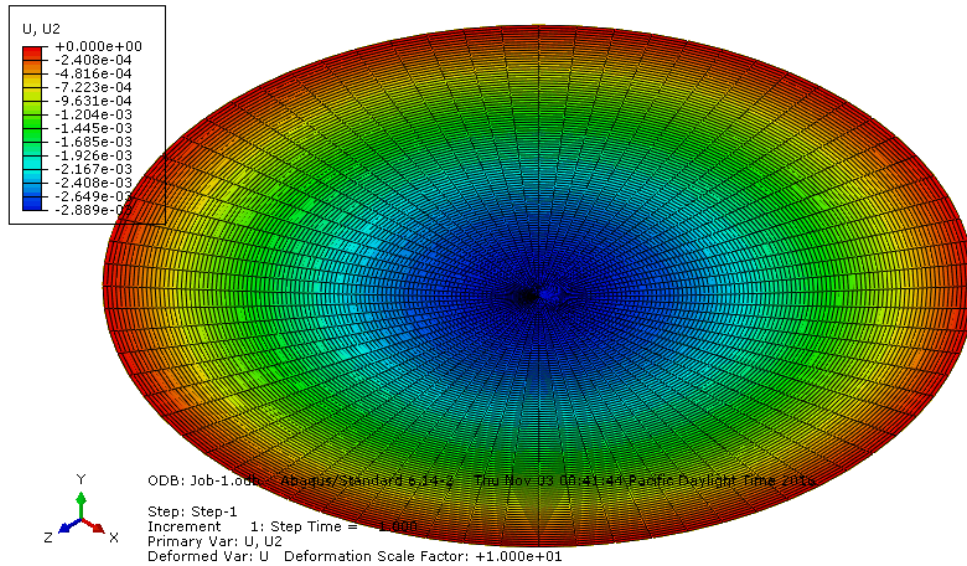


شکل ۲: مقایسه تنش های بدست آمده از حل تئوری با نرم افزار آباکوس در شرایط تکیه گاهی ساده

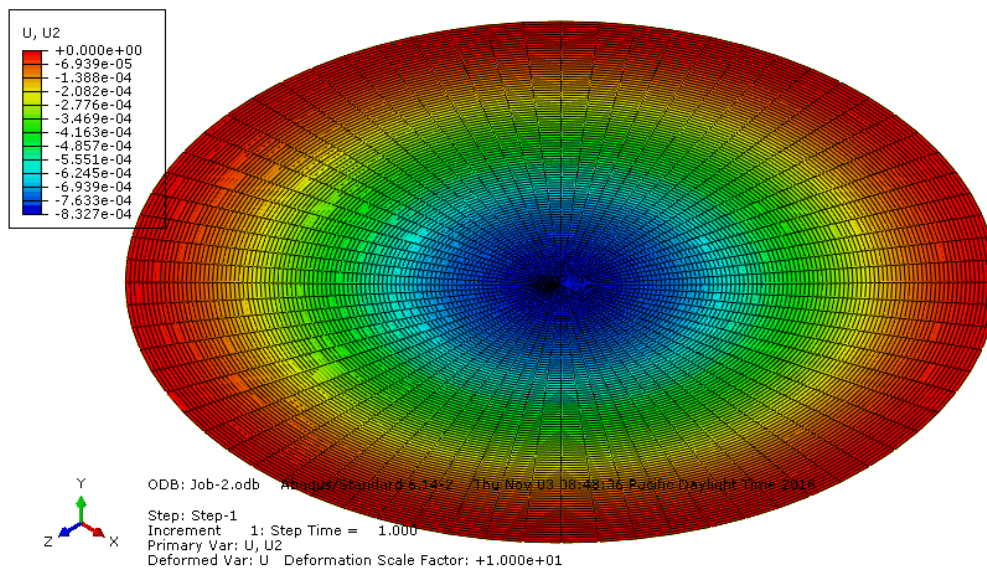


شکل ۳: مقایسه تنش های بدست آمده از حل تئوری با نرم افزار آباکوس در شرایط تکیه گاهی گیردار

« حل اجزاء محدود »



الف



ب

شکل ۴: کانتور تغییر مکان الف) تکیه گاه ساده، ب) تکیه گاه گیردار