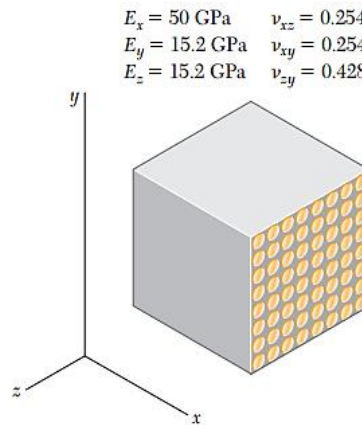


تحلیل تنش در مکعب کامپوزیتی

جلسه هفدهم

در شکل زیر، مکعب کامپوزیتی به ابعاد ۴۰ میلیمتر در راستای X تقویت شده است. با فرض اینکه این مکعب در دو راستای Y و Z مقید بوده و در راستای X تحت بار کششی ۶۵ کیلونیوتن قرار می‌گیرد، تغییر مکان در راستای X و تنش‌ها را در سه جهت حساب کنید. سپس این مسئله را با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مدل کرده و نتایج را با مقدار بدست آمده از حل تئوری مقایسه نمایید.



« حل تئوری »

برای درک بهتر روابط تئوری نیاز به مقدمه‌ای در خصوص کامپوزیت‌ها می‌باشد که در زیر به آن اشاره شده است.

۱. رابطه تنش بر حسب کرنش الاستیک کل (Hook Law):

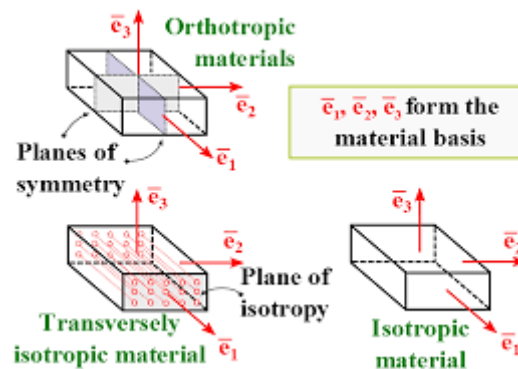
$$\sigma = D^{el} \varepsilon^{el}$$

در این رابطه σ تنش کل (تانسور تنش کوشی در مسائل با تغییر شکل محدود)، D^{el} تانسور الاستیسیته مرتبه چهارم و ε^{el} کرنش الاستیک کل می‌باشد.

تذکره: این رابطه برای کرنش‌های کمتر از ۵ درصد قابل استفاده است. در کرنش‌های بالاتر از ماده با خواص هایپر الاستیک باید استفاده شود.

۲. انواع ماده از نظر تقارن:

بسته به تعداد صفحات موجود برای خواص الاستیک، یک ماده را می‌توان به دسته‌های مختلفی (Isotropic, Anisotropic, Ortotropic و ...) تقسیم بندی کرد. شکل زیر چند ماده مختلف را نشان می‌دهد.



الف) قانون هوك برای مواد غير ايزوتروپيك (Anisotropic Materials):

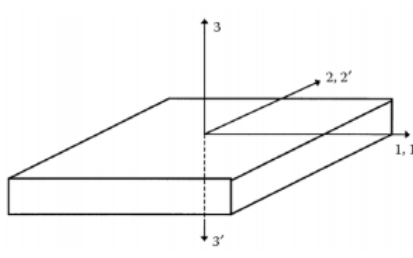
به دليل اينكه هيچ گونه تقارنى در اين ماده نمى باشد، ماتريس سختى در اين ماده داراى ۲۱ ثابت است كه هريك جداگانه مى بايست تعريف شود. برای حالت تنش صفحه تنش در راستاى ۳ به صورت پيش فرض صفر در نظر گرفته شده و ثوابت ماتريس کاهش پيدا مى کنند. اين مواد اگر تحت بار محورى قرار گيرند تنش برشى در آنها به وجود خواهد آمد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1113} & D_{1123} \\ & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2213} & D_{2223} \\ & & D_{3333} & D_{3312} & D_{3313} & D_{3323} \\ & & & D_{1212} & D_{1213} & D_{1223} \\ & & & & D_{1313} & D_{1323} \\ & & & & & D_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = [D^{el}] \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}$$

sym

ب) قانون هوك برای مواد منوكلينيك (Monoclinic Materials):

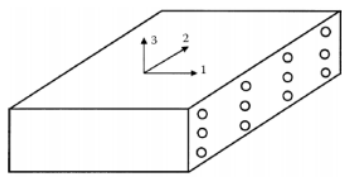
اگر تقويت کننده ها در دو راستا قرار گرفته باشند در اين صورت فقط يك صفحه تقارن وجود خواهد داشت و آن صفحه اى است كه تقويت کننده ها در آن قرار گرفته اند. در شكل زير صفحه XY همان صفحه تقارن است كه نرمال آن جهت ۳ مى باشد. در مواد منوكلينيك تعداد ثوابت ۱۳ مى باشد.



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

(ج) قانون هوك برای مواد ارتوتروپيك (Orthotropic Materials):

ماده با خواص ارتوتروپيك دارای ۲ صفحه تقارن می باشد. در این مواد فیبرها در یک جهت قرار می گیرند در نتیجه ثوابت ماتریس سختی از ۲۱ به ۹ کاهش پیدا می کند. در این مواد هیچ ارتباطی بن تنش های نرمال و کرنش های برشی وجود ندارد. یعنی اگر این مواد در سه جهت کشیده شوند هیچ تنش برشی در آنها به وجود نخواهد آمد.



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

خواص ارتوتروپيك در حالت تنش صفحه ای:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

(د) خواص ارتوتروپيك با وارد کردن ثوابت مهندسی (Engineering Constant):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}, \quad G_{13} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{13})}, \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$$

$$\text{Prove: } \frac{1}{G_{12}} = 2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) = 2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) = \frac{2(1 + \nu_{12})}{E_1} \rightarrow G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}$$

ه) خواص آیزوتروپیک عرضی (Transversely Isotropic Materials):

یک حالت خاص از خواص ارتوتروپیک می باشد که در آن یک صفحه به عنوان صفحه آیزوتروپیک (صفحه ای که خواص در آن تغییر نمی کند) شناخته می شود. این خواص در نرم افزار آباکوس در بخش ثوابت مهندسی یا خواص ارتوتروپیک وارد می شود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_p & -\nu_p/E_p & -\nu_{tp}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_p/E_p & 1/E_p & -\nu_{tp}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{pt}/E_p & -\nu_{pt}/E_p & 1/E_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

و) خواص آیزوتروپیک (Isotropic Materials):

ماده آیزوتروپیک دارای بیشمار صفحه تقارن می باشد. یعنی خواص در راستاهای مختلف یکسان بوده و تغییر نمی کند.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

۳. حل تئوری مسئله:

با استفاده از ماتریس ارائه شده در بخش «د» برای ثوابت مهندسی می توان رابطه کرنش بر حسب تنش را به صورت زیر نوشت:

$$1. \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z}, \quad 2. \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z}, \quad 3. \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_z} - \frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y}$$

به دلیل تقارن مسئله سه رابطه دیگر به روابط فوق مطابق زیر اضافه می شود:

$$4. \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x}, \quad 5. \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x}, \quad 6. \frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y}$$

با توجه به بسته بودن مکعب در دو راستای y و z ، کرنش در این دو جهت صفر است. بنابراین، داریم:

$$\frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z} = 0 \rightarrow \sigma_y - 0.428\sigma_z = 0.077\sigma_x \quad (7)$$

$$\frac{\sigma_z}{E_z} - \frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} = 0 \rightarrow -0.428\sigma_y + \sigma_z = 0.077\sigma_x \quad (8)$$

از حل دو معادله فوق مقدار تنش در راستای y و z به صورت زیر بدست می آید:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0.134\sigma_x \quad (9)$$

با قرار دادن روابط فوق در معادله ۱ می توان مقدار کرنش را بدست آورد. مقدار تنش در راستای x از تقسیم نیروی ۶۵۰۰۰ نیوتن بر سطح مقطع ۱۶۰۰ میلی متر مربعی برابر ۴۰/۶۲۵ مگاپاسکال بدست آمده است. با قرار دادن این مقدار در رابطه ۹ مقدار تنش در دو راستای دیگر برابر ۵/۴۸ مگاپاسکال بدست می آید.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z} = 756.78 \times 10^{-6} \rightarrow \delta = L\varepsilon_x = 0.0303 \text{ mm}$$

تذکره: همان طور که مشخص است مقدار کرنش از ۵ درصد کمتر بوده پس می توان مسئله را با فرض الاستیک خطی در نرم افزار آباکوس حل و نتایج را با این مقدار مقایسه کرد.