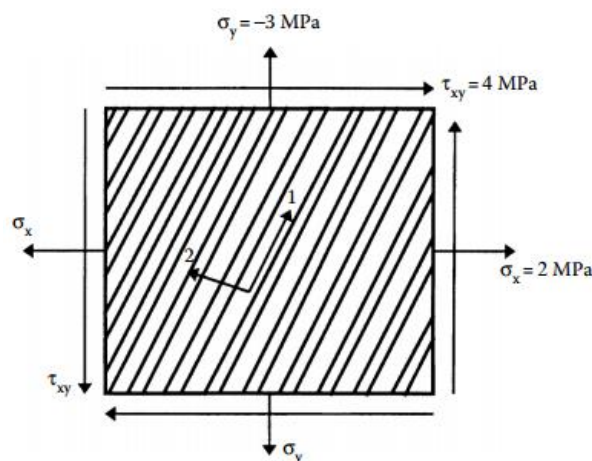


## جلسه نوزدهم تحلیل تنش در گرافیت / اپوکسی تقویت شده در جهت مایل

برای گرافیت / اپوکسی نشان داده شده در شکل زیر مطلوب است:

- ۱- ماتریس نرمی انتقالی (Transformed Compliance Matrix)
  - ۲- ماتریس سختی کاهش یافته انتقالی (Transformed Reduced Stiffness Matrix)
  - ۳- کرنش‌های کلی (Global Strains)
  - ۴- کرنش‌های محلی (Local Strains)
  - ۵- تنش‌های محلی (Local Stress)
  - ۶- تنش‌های اصلی (Principal Stresses)
  - ۷- تنش برشی ماکزیمم (Maximum Shear Stress)
  - ۸- کرنش‌های اصلی (Principal Strains)
  - ۹- بیشترین کرنش برشی (Maximum Shear Strain)
- در ادامه مسئله را با نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس مدل کرده و نتایج را با مقدار تئوری مقایسه نمایید. ابعاد ورق را ۱۰۰ میلیمتر و شرایط و تنش صفحه‌ای در نظر بگیرید.



جدول ۱: خواص مکانیکی لمینیت یک جهته در سیستم SI

Property	Symbol	Units	Glass/ epoxy	Boron/ epoxy	Graphite/ epoxy
Fiber volume fraction	$V_f$		0.45	0.50	0.70
Longitudinal elastic modulus	$E_1$	GPa	38.6	204	181
Transverse elastic modulus	$E_2$	GPa	8.27	18.50	10.30
Major Poisson's ratio	$\nu_{12}$		0.26	0.23	0.28
Shear modulus	$G_{12}$	GPa	4.14	5.59	7.17
Ultimate longitudinal tensile strength	$(\sigma_1^T)_{ult}$	MPa	1062	1260	1500
Ultimate longitudinal compressive strength	$(\sigma_1^C)_{ult}$	MPa	610	2500	1500
Ultimate transverse tensile strength	$(\sigma_2^T)_{ult}$	MPa	31	61	40
Ultimate transverse compressive strength	$(\sigma_2^C)_{ult}$	MPa	118	202	246
Ultimate in-plane shear strength	$(\tau_{12})_{ult}$	MPa	72	67	68
Longitudinal coefficient of thermal expansion	$\alpha_1$	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	8.6	6.1	0.02
Transverse coefficient of thermal expansion	$\alpha_2$	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	22.1	30.3	22.5
Longitudinal coefficient of moisture expansion	$\beta_1$	$\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$	0.00	0.00	0.00
Transverse coefficient of moisture expansion	$\beta_2$	$\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$	0.60	0.60	0.60

قانون هوک برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

« حل تئوری »

۱- محاسبه ماتریس نرمی:

با استفاده از جدول ارائه شده با در اختیار داشتن مقادیر  $E_1$ ،  $E_2$ ،  $\nu_{12}$  و  $G_{12}$  می توان ضرایب ماتریس نرمی را بدست آورد. این مقادیر به صورت زیر می باشند:

$$E_1 = 181 \text{ GPa}, E_2 = 10.3 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.28, G_{12} = 7.17 \text{ GPa}.$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه هوک برای مواد تنش صفحه ای، ضرایب ماتریس نرمی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$S_{11} = \frac{1}{181 \times 10^9} = 0.5525 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \quad S_{12} = -\frac{0.28}{181 \times 10^9} = -0.1547 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{22} = \frac{1}{10.3 \times 10^9} = 0.9709 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, \quad S_{66} = \frac{1}{7.17 \times 10^9} = 0.1395 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}.$$

با استفاده از روابط ماتریس انتقال می توان ضرایب ماتریس نرمی انتقال یافته را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\bar{S}_{11} = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4,$$

$$\bar{S}_{12} = S_{12}(s^4 + c^4) + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2,$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11}s^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}c^4,$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c,$$

$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})s^3c - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})sc^3,$$

$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4).$$

در این روابط C کسینوس و S سینوس می باشد که برای زاویه ۶۰ درجه به ترتیب ۰/۵۰۰ و ۰/۸۶۶ می باشد.

.....  
**Teacher:** Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand

**Email:** ehsanfathi\_eh@yahoo.com

**Website:** FathiTrainingGroup.com

**Tel:** 09386249330

$$\begin{aligned}\bar{S}_{11} &= 0.5525 \times 10^{-11} (0.500)^4 + [2(-0.1547 \times 10^{-11}) \\ &+ 0.1395 \times 10^{-9}] (0.866)^2 (0.5)^2 + 0.9709 \times 10^{-10} (0.866)^4 \\ &= 0.8053 \times 10^{-10} \frac{1}{Pa} \\ \bar{S}_{12} &= -0.7878 \times 10^{-11} \frac{1}{Pa}, \\ \bar{S}_{16} &= -0.3234 \times 10^{-10} \frac{1}{Pa}, \\ \bar{S}_{22} &= 0.3475 \times 10^{-10} \frac{1}{Pa}, \\ \bar{S}_{26} &= -0.4696 \times 10^{-10} \frac{1}{Pa}, \\ \bar{S}_{66} &= 0.1141 \times 10^{-9} \frac{1}{Pa}.\end{aligned}$$

۲- محاسبه ماتریس سختی کاهش یافته:

با گرفتن معکوس از ماتریس نرمی انتقالی  $[\bar{S}]$  می توان ماتریس سختی کاهش یافته  $[\bar{Q}]$  را محاسبه کرد.

$$\begin{aligned}[\bar{Q}] &= \begin{bmatrix} 0.8053 \times 10^{-10} & -0.7878 \times 10^{-11} & -0.3234 \times 10^{-10} \\ -0.7878 \times 10^{-11} & 0.3475 \times 10^{-10} & -0.4696 \times 10^{-10} \\ -0.3234 \times 10^{-10} & -0.4696 \times 10^{-10} & 0.1141 \times 10^{-9} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2365 \times 10^{11} & 0.3246 \times 10^{11} & 0.2005 \times 10^{11} \\ 0.3246 \times 10^{11} & 0.1094 \times 10^{12} & 0.5419 \times 10^{11} \\ 0.2005 \times 10^{11} & 0.5419 \times 10^{11} & 0.3674 \times 10^{11} \end{bmatrix} Pa.\end{aligned}$$

۳- محاسبه کرنش های کلی:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8053 \times 10^{-10} & -0.7878 \times 10^{-11} & -0.3234 \times 10^{-10} \\ -0.7878 \times 10^{-11} & 0.3475 \times 10^{-10} & -0.4696 \times 10^{-10} \\ -0.3234 \times 10^{-10} & -0.4696 \times 10^{-10} & 0.1141 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \times 10^6 \\ -3 \times 10^6 \\ 4 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5534 \times 10^{-4} \\ -0.3078 \times 10^{-3} \\ 0.5328 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

۴- محاسبه کرنش های محلی:

با استفاده از ماتریس انتقال می توان رابطه بین کرنش های کلی و محلی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} / 2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} / 2 \end{bmatrix},$$

رابطه فوق برابر صفر می باشد که در آن T ماتریس انتقال است و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix},$$

بنابراین، با استفاده از روابط فوق کرنش های محلی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} / 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.7500 & 0.8660 \\ 0.7500 & 0.2500 & -0.8660 \\ -0.4330 & 0.4330 & -0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5534 \times 10^{-4} \\ -0.3078 \times 10^{-3} \\ 0.5328 \times 10^{-3} / 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1367 \times 10^{-4} \\ -0.2662 \times 10^{-3} \\ -0.5809 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

## ۵- محاسبه تنش های محلی:

با استفاده از روابط ارائه شده در زیر می توان تنش های محلی را برحسب تنش های اصلی بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.7500 & 0.8660 \\ 0.7500 & 0.2500 & -0.8660 \\ -0.4330 & 0.4330 & -0.5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \times 10^6 \\ -3 \times 10^6 \\ 4 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1714 \times 10^7 \\ -0.2714 \times 10^7 \\ -0.4165 \times 10^7 \end{bmatrix} Pa.$$

## ۶- محاسبه تنش های اصلی:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{2 \times 10^6 - 3 \times 10^6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \times 10^6 + 3 \times 10^6}{2}\right)^2 + (4 \times 10^6)^2}$$

$$= 4.217, -5.217 MPa.$$

همچنین، زاویه ای که در آن بیشترین تنش اتفاق می افتد به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2(4 \times 10^6)}{2 \times 10^6 + 3 \times 10^6} \right)$$

$$= 29.00^\circ .$$

۷- محاسبه تنش برشی ماکزیمم:

مقدار تنش برشی ماکزیمم نصف مقدار تنش ترسکا می باشد که به صورت قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \times 10^6 - 3 \times 10^6}{2}\right)^2 + (4 \times 10^6)^2} \\ &= 4.717 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

همچنین، زاویه ای که در آن بیشترین تنش برشی اتفاق می افتد به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\theta_s &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( -\frac{2 \times 10^6 + 3 \times 10^6}{2(4 \times 10^6)} \right) \\ &= 16.00^\circ\end{aligned}$$

۸- محاسبه کرنش های اصلی:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\max, \min} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3}}{2} \\ &\quad \pm \sqrt{\left(\frac{0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.5328 \times 10^{-3}}{2}\right)^2} \\ &= 1.962 \times 10^{-4}, -4.486 \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

زاویه‌ای که در آن کرنش‌های اصلی نرمال به وجود می‌آیند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\theta_p &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{0.5328 \times 10^{-3}}{0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3}} \right) \\ &= 27.86^\circ.\end{aligned}$$

۹- محاسبه کرنش برشی ماکزیمم:

$$\begin{aligned}\gamma_{\max} &= \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ &= \sqrt{(0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3})^2 + (0.532 \times 10^{-3})^2} \\ &= 6.448 \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

زاویه‌ای که در آن کرنش برشی ماکزیمم اتفاق می‌افتد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\theta_s &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( -\frac{0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3}}{0.5328 \times 10^{-3}} \right) \\ &= -17.14^\circ.\end{aligned}$$