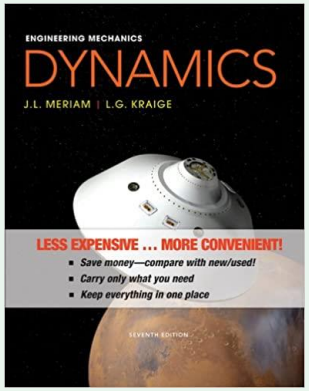
به نام خدا



آموزش دینامیک - جلسه ششم

مدرس: احسان فتحی

مدیر و موسس آموزشگاه آزاد فنی و حرفه‌ای فتحی

Telegram & Instagram: *@FathiTrainingGroup*

Website: *FathiTrainingGroup.com*

Email: *ehsanfathi_eh@yahoo.com*

Tel: *09386249330, 05136210687*

گروه آموزشی فتحی

فصل دوم:

سینماتیک ذرات

گروه آموزشی فتحی

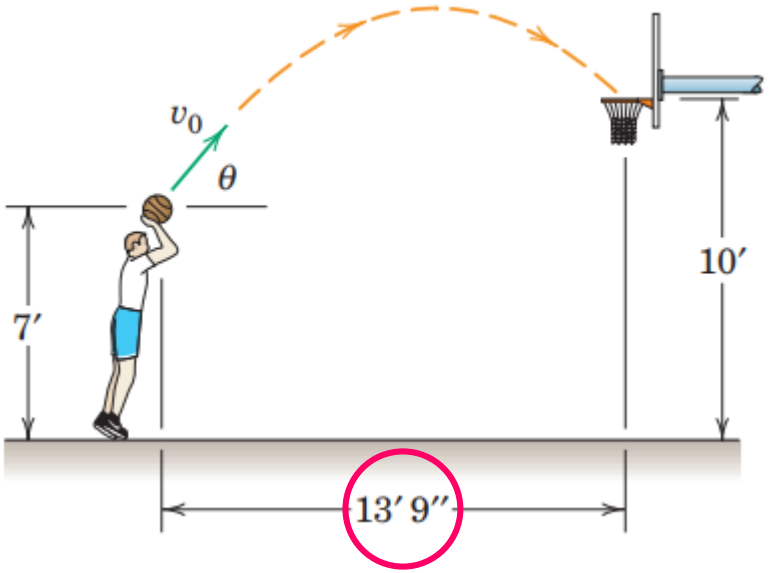
سرفصل مطالب

- مقدمه
- حرکت مستقیم الخط
- حرکت منحنی الخط در صفحه
- دستگاه مختصات دکارتی
- دستگاه مختصات قائم و مماسی
- دستگاه مختصات قطبی
- حرکت منحنی الخط در فضا
- حرکت مقید ذرات
- تمرین‌های فصل

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **تمرین ۷۸-۲:**

بازیکن بسکتبالی توپ خود را با سرعت اولیه ۲۳/۵ فوت بر ثانیه به سمت سبد پرتاب می کند. مقدار θ چقدر باشد تا توپ از داخل سبد عبور کند.



بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

ابتدا زمان رسیدن توپ به سبد را با نوشتن روابط در جهت x بدست می‌آوریم. برای این منظور از رابطه اول به دلیل ثابت بودن سرعت در جهت x استفاده می شود.

1 $v_x = \frac{dx}{dt}$

2 $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

3 $v_x dv_x = a_x dx$

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\theta$$

$$dx = v_x dt \quad \Rightarrow \quad dx = v_0 cos\theta dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos(\theta) dt \quad \Rightarrow \quad x = v_0 \cos(\theta) t$$

$$\boxed{t = \frac{x}{v_0 cos\theta}}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **حل**: در ادامه رابطه موقعیت توپ در جهت y را بر حسب زمان بدست می آوریم.

1 $v_y = \frac{dy}{dt}$

2 $a_y = \frac{dv_y}{dt}$

3 $v_y dv_y = a_y dy$

$$dv_y = a_y dt \xrightarrow{a_y = -g} dv_y = -g dt$$

$$\int_{v_0 sin\theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g dt \Rightarrow \boxed{v_y = -gt + v_0 sin\theta}$$

$$dy = v_y dt \Rightarrow dy = (-gt + v_0 sin\theta)dt$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (-gt + v_0 sin\theta)dt \Rightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 sin\theta . t + y_0}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

$$t = \frac{x}{v_0 cos\theta}$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 sin\theta . t + y_0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right)^2 + v_0 sin\theta . \left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right) + y_0$$

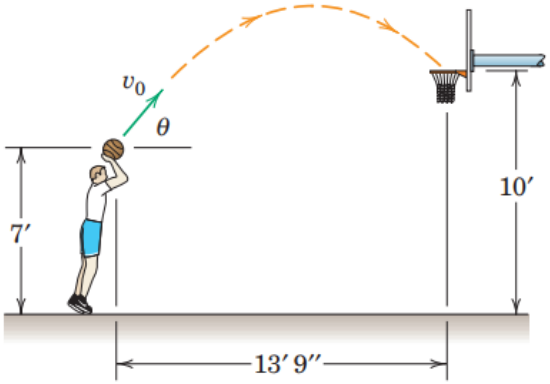
$$\boxed{\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + tg^2\theta}$$

$$-5.51 tg^2\theta + 13.75 tg\theta - 8.51 = 0$$

$$x = 13.75\ ft$$
$$y = 10\ ft$$
$$y_0 = 7\ ft$$
$$g = 32.2\frac{ft}{\sec^2}$$
$$v_0 = 23.5\ ft/sec$$

$$tg\theta = 1.138 \ \ or \ \ 1.356$$

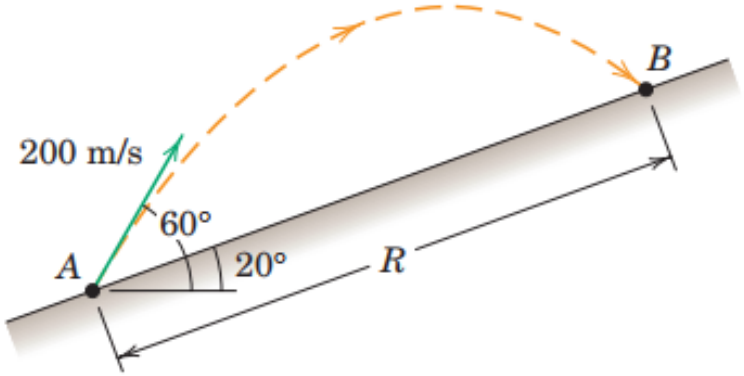
$$\boxed{\theta = 48.7 \ \ or \ \ 53.6}$$



بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **تمرین ۷۹-۲:**

پرتابه ای با سرعت اولیه ۲۰۰ متر بر ثانیه و زاویه ۶۰ درجه نسبت به محور افق پرتاب می شود. مطلوب است محاسبه مقدار R که از نقطه پرتاب تا محل فرود پرتابه اندازه گیری شده است.



بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

ابتدا زمان رسیدن پرتابه به بالای سطح شیبدار را با نوشتن روابط در جهت X بدست می‌آوریم. برای این منظور از رابطه اول به دلیل ثابت بودن سرعت در جهت X استفاده می شود.

1 $v_x = \frac{dx}{dt}$

2 $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

3 $v_x dv_x = a_x dx$

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\theta$$

$$dx = v_x dt \quad \Rightarrow \quad dx = v_0 cos\theta dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos(\theta) dt \quad \Rightarrow \quad x = v_0 \cos(\theta) t$$

$$\boxed{t = \frac{x}{v_0 cos\theta}}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **حل**: در ادامه رابطه موقعیت پرتابه در جهت y را بر حسب زمان بدست می آوریم.

1 $v_y = \frac{dy}{dt}$

2 $a_y = \frac{dv_y}{dt}$

3 $v_y dv_y = a_y dy$

$a_y = -g$

$$dv_y = a_y dt \Rightarrow dv_y = -g dt$$

$$\int_{v_0 sin\theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g dt \Rightarrow \boxed{v_y = -gt + v_0 sin\theta}$$

$$dy = v_y dt \Rightarrow dy = (-gt + v_0 sin\theta) dt$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (-gt + v_0 sin\theta) dt \Rightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 sin\theta . t + y_0}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

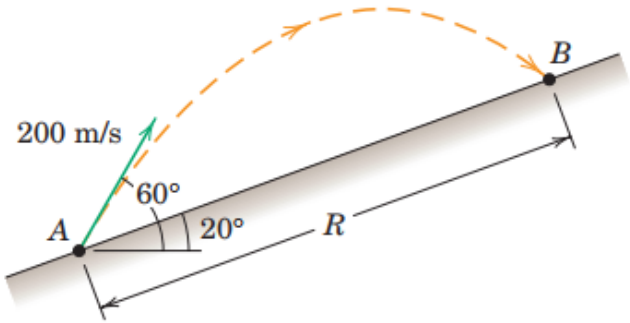
$$t = \frac{x}{v_0 cos\theta}$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 sin\theta . t + y_0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right)^2 + v_0 sin\theta . \left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right) + y_0$$

$$x = R cos20$$
$$y = R sin20$$
$$y_0 = 0$$
$$g = 9.81\ m/s^2$$
$$v_0 = 200\ m/s$$
$$\theta = 60°$$

$$-4.33 \times 10^{-4} R^2 + 1.28R = 0$$

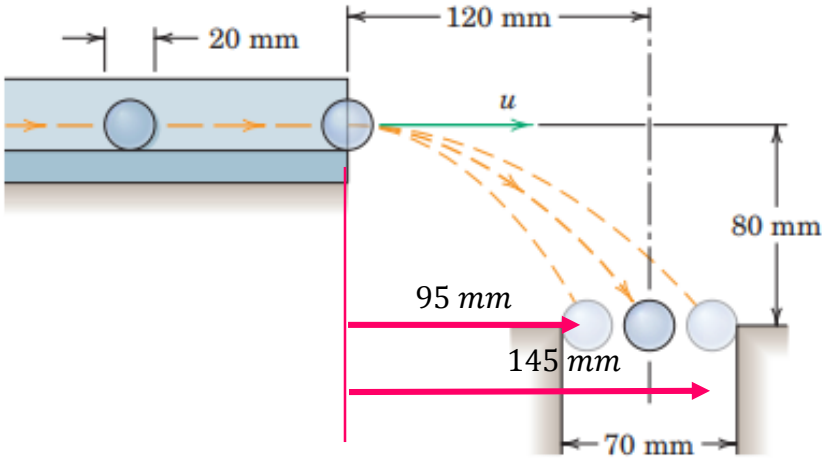
$$R = 2956\ m$$



بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **تمرین ۸۵-۲:**

تعدادی گوی به قطر ۲۰ میلی متر با سرعت اولیه u بر روی یک سطح افقی حرکت کرده و به داخل لوله ای به قطر ۷۰ میلی متر می افتند. بازه قابل قبول u برای اینکه تمامی گوی‌ها داخل سوراخ قرار بگیرند را بدست آورید.



بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **حل:**

برای اینکه تمامی گوی ها داخل سوراخ قرار بگیرند بازه قابل قبول برای x با در نظر گرفتن قطر گوی‌ها ۹۵ تا ۱۴۵ میلی متر است. ابتدا با نوشتن روابط در جهت x زمان رسیدن گوی به سوراخ را بدست می آوریم.

1 $v_x = \frac{dx}{dt}$

2 $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

3 $v_x dv_x = a_x dx$

$$dx = v_x dt \xrightarrow{v_x = u} dx = udt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t udt \Rightarrow x = ut$$

$$\boxed{t = \frac{x}{u}}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **حل**: در ادامه رابطه موقعیت گوی در جهت y را بر حسب زمان بدست می آوریم.

1 $v_y = \frac{dy}{dt}$

2 $a_y = \frac{dv_y}{dt}$

3 $v_y dv_y = a_y dy$

$$dv_y = a_y dt \xrightarrow{a_y = -g} dv_y = -g dt$$

$$\int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t -g dt \rightarrow \boxed{v_y = -gt}$$

$$dy = v_y dt \rightarrow dy = -gt dt$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t -gt dt \rightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2}t^2}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **حل**: در رابطه y زمان را بر حسب x می گذاریم:

$$t = \frac{x}{u}$$

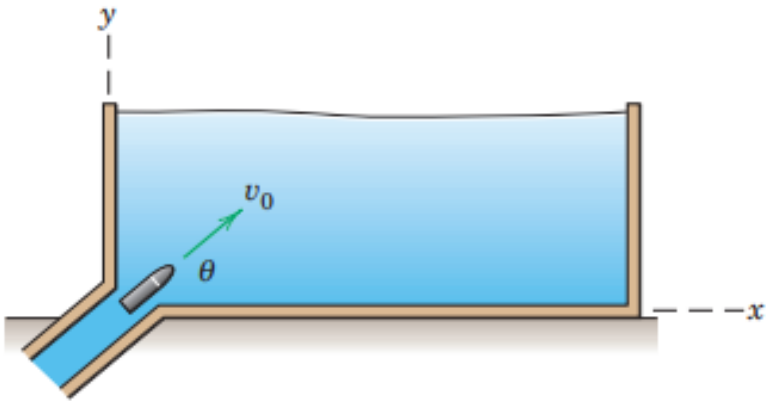
$$y = -\frac{g}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{u}\right)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0.095 \ \& \ 0.145 \ m \\ y &= -0.08 \\ g &= 9.81 \ m/s^2 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = 0.744 \ \ \& \ \ 1.135 \ m/s}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **تمرین ۹۳-۲:**

پرتابه ای در لحظه $t = 0$ با سرعت اولیه v_0 و زاویه θ درون سیالی پرتاب می شود. نیروی درگ باعث می شود پرتابه شتابی معادل $\boldsymbol{a} = -k\boldsymbol{v}$ پیدا کند که در آن $\mathbf{v}$ سرعت پرتابه و k ثابت مثبت می باشد. مطلوب است تعیین مؤلفه های x و y سرعت و موقعیت به صورت تابعی از زمان.



بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

ابتدا با نوشتن روابط در جهت x رابطه سرعت بر حسب زمان بدست می آید.

1 $v_x = \frac{dx}{dt}$

2 $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

3 $v_x dv_x = a_x dx$

$$a_x = -kv_x$$

$$dv_x = a_x dt \Rightarrow dv_x = -kv_x dt$$

$$\int_{v_0 \cos\theta}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -k \int_0^t dt \Rightarrow lnv_x - lnv_0 cos\theta = -kt$$

$$ln\frac{v_x}{v_0 cos\theta} = -kt \Rightarrow \boxed{v_x = v_0 cos\theta e^{-kt}}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **حل:**

با یک بار انتگرال گیری از سرعت نسبت به زمان رابطه موقعیت بر حسب زمان بدست می آید.

1 $v_x = \frac{dx}{dt}$

2 $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

3 $v_x dv_x = a_x dx$

$$v_x = v_0 cos\theta e^{-kt}$$

$$dx = v_x dt \quad \Rightarrow \quad dx = v_0 cos\theta e^{-kt} dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 cos\theta e^{-kt} dt \quad \Rightarrow \quad x\Big|_0^x = -\frac{v_0 cos\theta}{k} e^{-kt}\Big|_0^t$$

$$\boxed{x = \frac{v_0 cos\theta}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

$$a_y = -(kv_y + g)$$

1 $v_y = \dfrac{dy}{dt}$

2 $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$

3 $v_y dv_y = a_y dy$

$$dv_y = a_y dt \quad \Rightarrow \quad dv_y = -(kv_y + g)dt$$

$$\int_{v_0 sin\theta}^{v_y} \frac{dv_y}{kv_y + g} = -\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k}\ln\frac{kv_y + g}{kv_0 sin\theta + g} = -t$$

$$kv_y + g = (kv_0 sin\theta + g)e^{-kt}$$

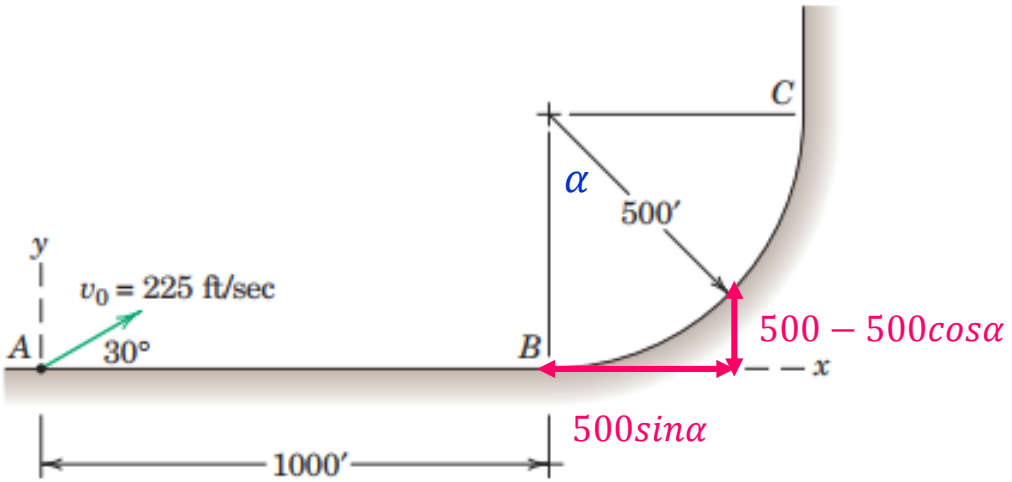
$$\boxed{v_y = \left(v_0 sin\theta + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{k}\left(v_0 sin\theta + \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- **تمرین ۹۶-۲:**

پرتابه ای از نقطه A با شرایط اولیه نشان داده شده در شکل پرتاب می شود. مطلوب است محاسبه مختصات x و y نقطه برخورد.



بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

ابتدا زمان را بر حسب موقعیت x بدست می آوریم.

1 $v_x = \frac{dx}{dt}$

2 $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

3 $v_x dv_x = a_x dx$

$$v_x = v_{0x} = v_0 cos\theta$$

$$dx = v_x dt \quad \Rightarrow \quad dx = v_0 cos\theta dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos(\theta) dt \quad \Rightarrow \quad x = v_0 \cos(\theta) t$$

$$\boxed{t = \frac{x}{v_0 cos\theta}}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

در ادامه رابطه موقعیت پرتابه در جهت y را بر حسب زمان بدست می آوریم.

1 $v_y = \frac{dy}{dt}$

2 $a_y = \frac{dv_y}{dt}$

3 $v_y dv_y = a_y dy$

$$dv_y = a_y dt \xrightarrow{a_y = -g} dv_y = -g dt$$

$$\int_{v_0 sin\theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g dt \Rightarrow \boxed{v_y = -gt + v_0 sin\theta}$$

$$dy = v_y dt \Rightarrow dy = (-gt + v_0 sin\theta) dt$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (-gt + v_0 sin\theta) dt \Rightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 sin\theta . t + y_0}$$

بخش چهارم: دستگاه مختصات دکارتی (x-y)

- حل:

$$t = \frac{x}{v_0 cos\theta}$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 sin\theta . t + y_0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right)^2 + v_0 sin\theta . \left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right) + y_0$$

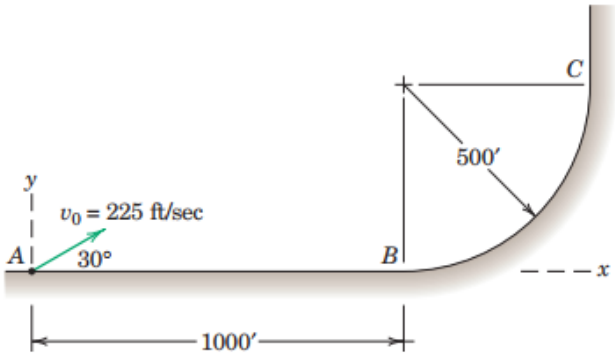
$x = 1000 + 500 sin\alpha$
$y = 500 - 500 cos\alpha$
$y_0 = 0\ ft$
$g = 32.2\ ft/s^2$
$v_0 = 225\ ft/s$
$\theta = 30°$

$$500 - 500 cos\alpha = -\frac{32.2}{2}\left(\frac{1000 + 500 sin\alpha}{225 cos30}\right)^2 + 225 sin30 . \left(\frac{1000 + 500 sin\alpha}{225 cos30}\right)$$

$$\alpha = 28.94$$

$$x = 1242\ ft$$

$$y = 62.7\ ft$$



گروه آموزشی فتحی

پیامبر اکرم (ص):

فاطمه را، فاطمه نامیدم، زیرا خداوند او را و آن کس که او را دوست داشته باشد، از آتش حفظ می کند.