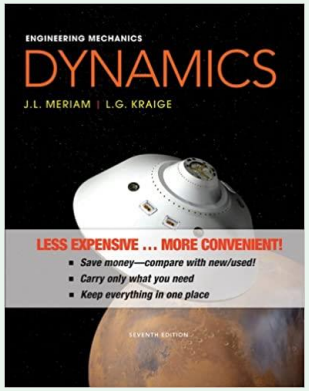
به نام خدا



آموزش دینامیک - جلسه هفتم

مدرس: احسان فتحی

مدیر و موسس آموزشگاه آزاد فنی و حرفه‌ای فتحی

Telegram & Instagram: *@FathiTrainingGroup*

Website: *FathiTrainingGroup.com*

Email: *ehsanfathi_eh@yahoo.com*

Tel: *09386249330, 05136210687*

گروه آموزشی فتحی

فصل دوم:

سینماتیک ذرات

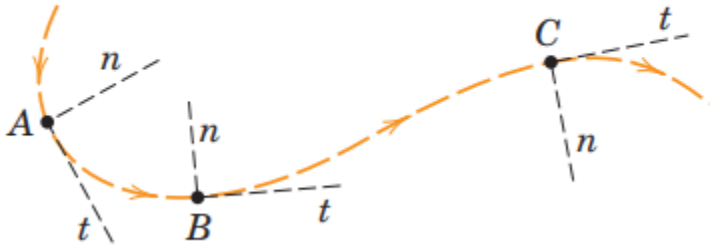
گروه آموزشی فتحی

سرفصل مطالب

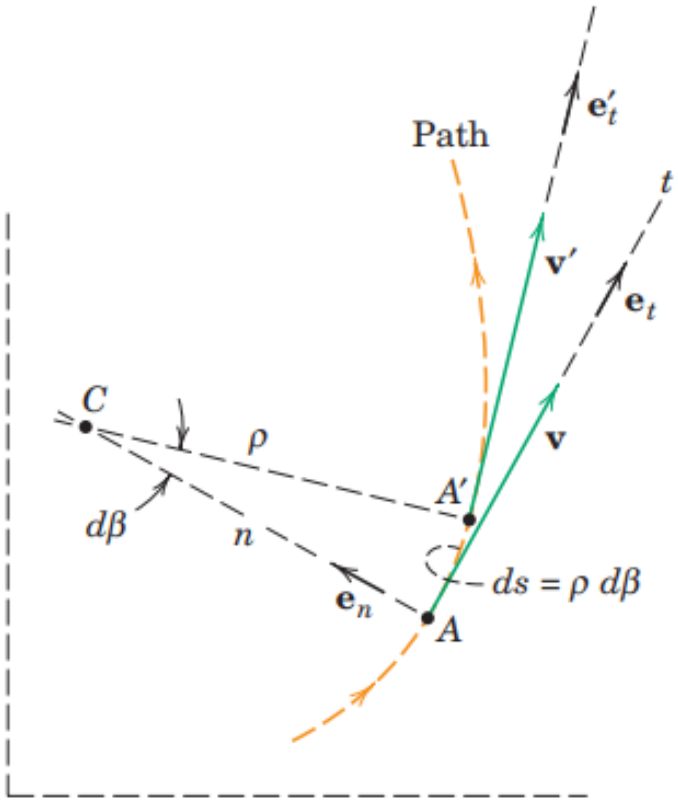
- مقدمه
- حرکت مستقیم الخط
- حرکت منحنی الخط در صفحه
- دستگاه مختصات دکارتی
- دستگاه مختصات قائم و مماسی
- دستگاه مختصات قطبی
- حرکت منحنی الخط در فضا
- حرکت مقید ذرات
- تمرین‌های فصل

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

یکی از دستگاه های رایج برای توصیف حرکت منحنی الخط دستگاه مختصات قائم و مماسی است. در این دستگاه مبدأ روی ذره قرار می گیرد و با حرکت ذره جابجا می شود. همچنین، یک محور همواره مماس بر مسیر (محور t) و محور دیگر عمود بر مسیر (محور n) است. بنابراین، با تغییر جهت حرکت ذره جهت این دو محور نیز تغییر می کند. شکل زیر حرکت یک ذره را از A تا C نشان می دهد. در این شکل جهت n همواره به سمت مرکز انحنا می باشد.



بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)



(a)

- **سرعت:**

از دستگاه مختصات قائم-مماسی می توان برای توصیف سرعت و شتاب حرکت ذره استفاده کرد. برای این منظور بردارهای یکه $\boldsymbol{e}_t$ و $\boldsymbol{e}_n$ به ترتیب در جهت های مماسی و قائم تعریف می شود. اگر مطابق شکل ذره به اندازه ds جابجای شود بردار سرعت به صورت زیر بدست می آید. این رابطه نشان می دهد سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت ذره است.

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\beta}{dt}$$

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t = \rho\dot{\beta}\mathbf{e}_t \qquad (2/7)$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **شتاب:**

با مشتق گیری از بردار سرعت نسبت به زمان شتاب بدست می آید.

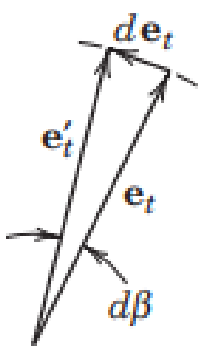
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_t)}{dt} = v\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{v}\mathbf{e}_t \qquad \textbf{(2/8)}$$

در رابطه بالا $\dot{\boldsymbol{e}}_t$ دارای مقدار می باشد زیرا جهت بردار یکه در حال تغییر است. به این ترتیب داریم:

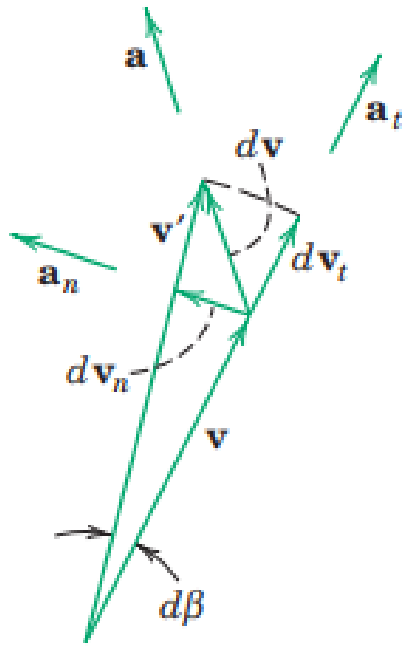
$$de_t = |e_t| d\beta = d\beta$$

$$d\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{e}_n d\beta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt} = \boldsymbol{e}_n \frac{d\beta}{dt} \qquad \boxed{\dot{\boldsymbol{e}}_t = \dot{\beta}\boldsymbol{e}_n} \qquad \textbf{(2/9)}$$



(b)

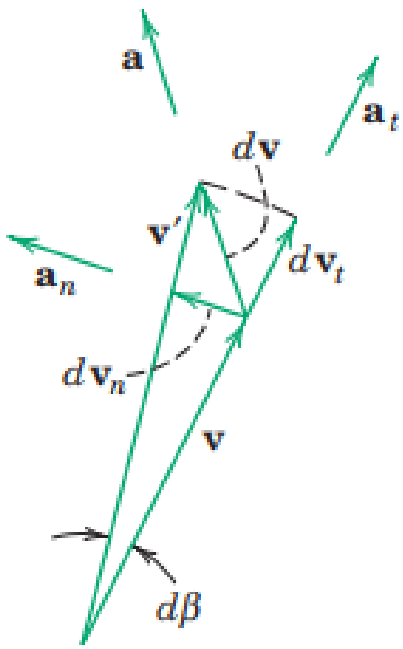


(c)

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- شتاب:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t = \rho\dot{\beta}\mathbf{e}_t \qquad (2/7)$$



(c)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_t)}{dt} = v\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{v}\mathbf{e}_t \qquad (2/8)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\beta}\mathbf{e}_n \qquad (2/9)$$

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{v}\mathbf{e}_t \qquad (2/10)}$$

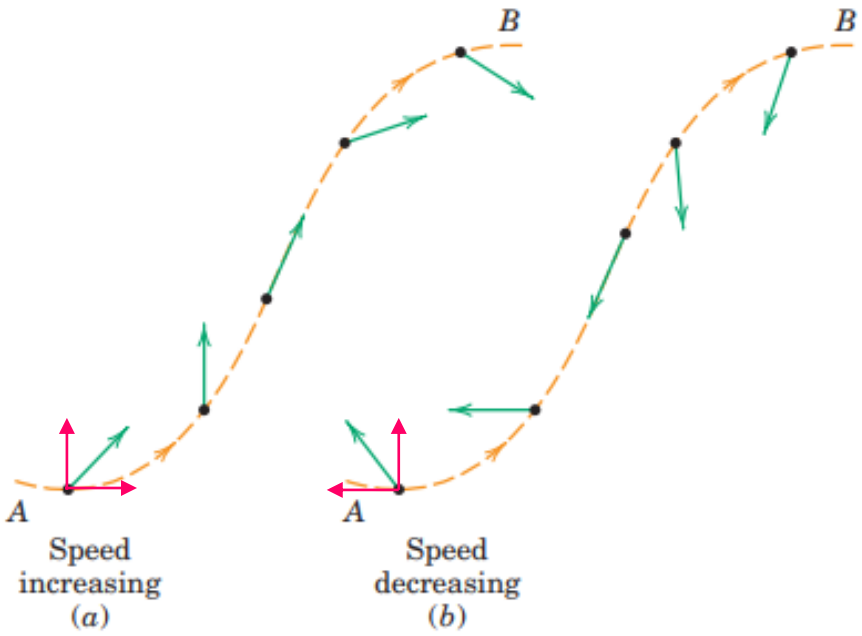
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta}$$

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_t}^2}$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- نمایش بردار شتاب برای ذره ای با سرعت افزایشی و کاهشی:

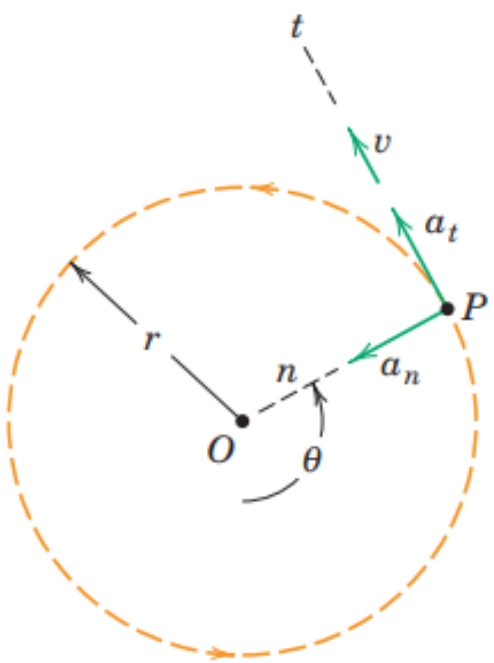


Acceleration vectors for particle moving from A to B

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

حرکت دایروی:

حرکت دایروی یک حالت خاص از حرکت منحنی الخط در صفحه می باشد که در آن شعاع انحنا ثابت بوده و ذره حول یک نقطه شروع به دوران می کند. به این ترتیب روابط سرعت و شتاب برای این حرکت ساده شده و به صورت زیر در می آیند.



$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t = \rho\dot{\beta}\mathbf{e}_t \qquad (2/7)$$

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{v}\mathbf{e}_t \qquad (2/10)$$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= r\dot{\theta} \\ a_n &= v^2/r = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta} \\ a_t &= \dot{v} = r\ddot{\theta} \end{aligned} \qquad (2/11)}$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

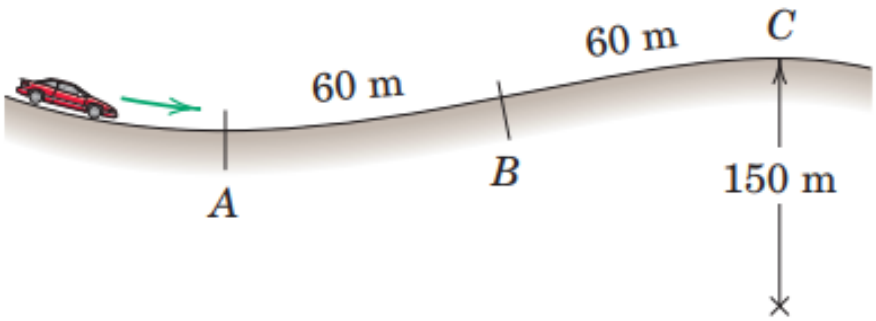
- **مسئله نمونه ۷-۲:**

برای پیش بینی پستی و بلندی های جاده، راننده خودرو از ترمز برای ایجاد یک شتاب یکنواخت استفاده می کند. سرعت خودرو در نقطه A ، ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت و در نقطه C که ۱۲۰ متر با نقطه A فاصله دارد ۵۰ کیلومتر بر ساعت است. اگر مسافران در نقطه A شتاب کل ۳ متر بر مجذور ثانیه را تجربه کنند و اگر شعاع انحنا در نقطه C ۱۵۰ متر باشد مطلوب است:

الف- شعاع انحنای ρ در نقطه A

ب- شتاب در نقطه عطف B

ج- شتاب کل در نقطه C



بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **حل:**

ابتدا سرعت در نقاط A و C بر حسب متر بر ثانیه بدست می آید:

$$v_A = \left(100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right)\left(1000\,\frac{\text{m}}{\text{km}}\right) = 27.8\text{ m/s}$$

$$v_C = 50\,\frac{1000}{3600} = 13.89\text{ m/s}$$

برای پیدا کردن مؤلفه مماسی شتاب از معادله مستقل از زمان می توان استفاده کرد:

$$\left[\int v\,dv = \int a_t\,ds\right] \qquad \int_{v_A}^{v_C} v\,dv = a_t\int_0^s ds$$

$$a_t = \frac{1}{2s}\left(v_C{}^2 - v_A{}^2\right) = \frac{(13.89)^2 - (27.8)^2}{2(120)} = -2.41\text{ m/s}^2$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

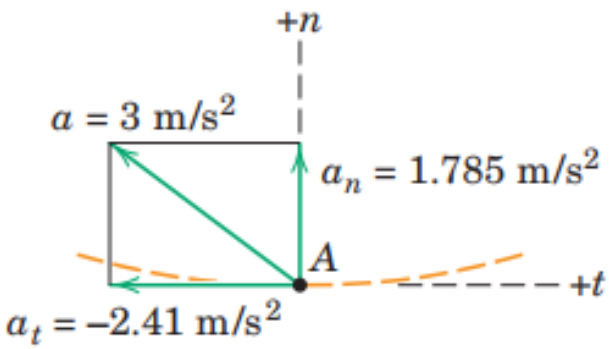
- **حل:**

الف– محاسبه شعاع انحنا در A:

با معلوم بودن شتاب کل می توان مؤلفه عمودی شتاب را بدست آورد و از آن برای محاسبه شعاع انحنا در نقطه A استفاده کرد.

$[a^2 = a_n{}^2 + a_t{}^2]$ $\quad a_n{}^2 = 3^2 - (2.41)^2 = 3.19$ $\quad a_n = 1.785\ \text{m/s}^2$

$[a_n = v^2/\rho]$ $\quad \rho = v^2/a_n = (27.8)^2/1.785 = 432\ \text{m}$



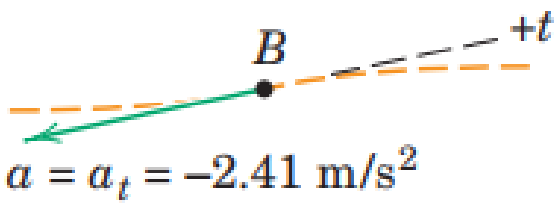
بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **حل:**

ب- محاسبه شتاب در نقطه B:

با توجه به اینکه نقطه B یک نقطه عطف می باشد شعاع انحنا در این نقطه بی نهایت بوده و مؤلفه عمودی شتاب برابر صفر است. بنابراین شتاب کل در این نقطه همان مؤلفه مماسی شتاب می باشد.

$$a = a_t = -2.41 \text{ m/s}^2$$

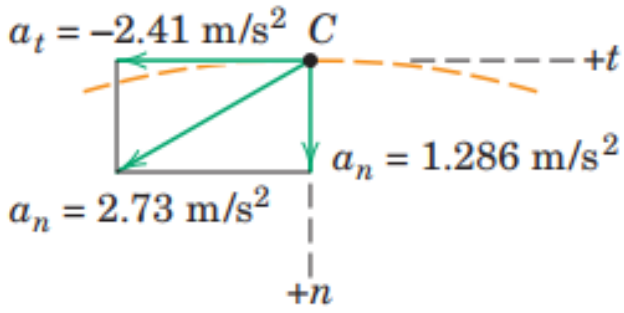


بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **حل:**

ج- محاسبه شتاب در نقطه C:

با معلوم بودن سرعت و شعاع انحنا در نقطه C می توان مؤلفه عمودی شتاب را در این نقطه محاسبه کرد. مؤلفه مماسی شتاب هم در طول مسیر ثابت است به این ترتیب شتاب کل با برآیند این دو شتاب بدست می آید.



$[a_n = v^2/\rho]$ $\quad a_n = (13.89)^2/150 = 1.286$ m/s^2

$$\mathbf{a} = 1.286\mathbf{e}_n - 2.41\mathbf{e}_t \text{ m/s}^2$$

$[a = \sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2}]$ $\quad a = \sqrt{(1.286)^2 + (-2.41)^2} = 2.73$ m/s^2

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **مسئله نمونه ۸-۲:**

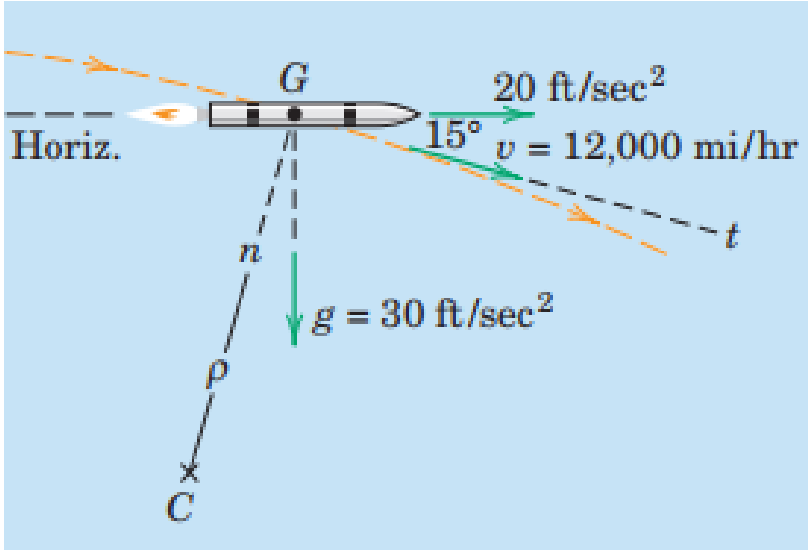
مؤلفه افقی و عمودی شتاب یک راکت مطابق شکل زیر می باشد. سرعت راکت ۱۲۰۰۰ مایل بر ساعت بوده که با محور افقی زاویه ۱۵ درجه می سازد. در این حالت مطلوب است:

الف- شعاع انحنای حرکت راکت

ب- نرخ افزایش سرعت v

ج- نرخ تغییر زاویه خط واصل بین نقاط G و C

د- نمایش برداری شتاب کل **a**



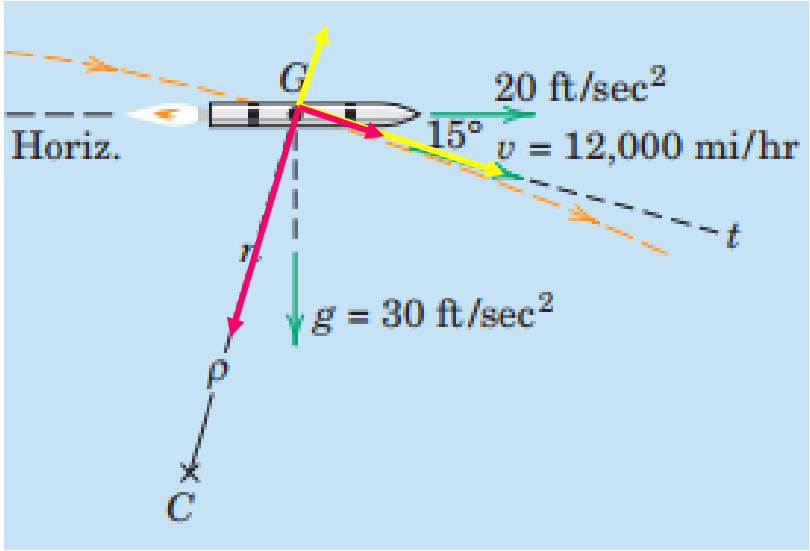
$$\frac{5280\ \text{ft/mi}}{3600\ \text{sec/hr}} = \frac{44\ \text{ft/sec}}{30\ \text{mi/hr}}$$

تبدیل مایل بر ساعت به فوت بر ثانیه

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **حل:**

ابتدا مؤلفه عمودی و مماسی شتاب را بدست می آوریم:



$$a_n = 30 \cos 15° - 20 \sin 15° = 23.8 \text{ ft/sec}^2$$

$$a_t = 30 \sin 15° + 20 \cos 15° = 27.1 \text{ ft/sec}^2$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **حل:**

الف– محاسبه شعاع انحنا:

با در اختیار داشتن سرعت و مؤلفه عمودی شتاب می توان شعاع انحنای مسیر حرکت راکت را بدست آورد.

$$[a_n = v^2/\rho] \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{[(12{,}000)(44/30)]^2}{23.8} = 13.01(10^6)\ \text{ft}$$

ب– محاسبه نرخ افزایش سرعت V:

منظور از نرخ سرعت همان شتاب می باشد. چون سرعت در جهت مماس بر مسیر می باشد بنابراین نرخ افزایش سرعت همان شتاب مماسی می باشد.

$$[\dot{v} = a_t] \qquad \dot{v} = 27.1\ \text{ft/sec}^2$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- حل:

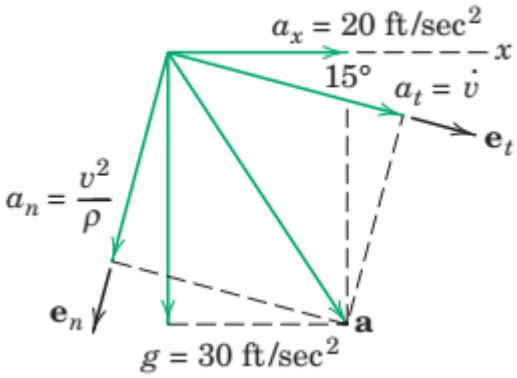
ج- نرخ تغییر زاویه خط CG:

منظور سرعت زاویه ای یا $\dot{\beta}$ می باشد که به صورت زیر حساب می شود.

$$[v = \rho\dot{\beta}] \qquad \dot{\beta} = v/\rho = \frac{12{,}000(44/30)}{13.01(10^6)} = 13.53(10^{-4})\ \text{rad/sec}$$

د- بردار شتاب بر حسب مؤلفه های مماسی و عمودی:

اندازه و جهت بردار شتاب کل در هر دستگاه مختصاتی ثابت می باشد. در دستگاه مختصات قائم – مماسی بردار شتاب به صورت زیر نوشته می شود.

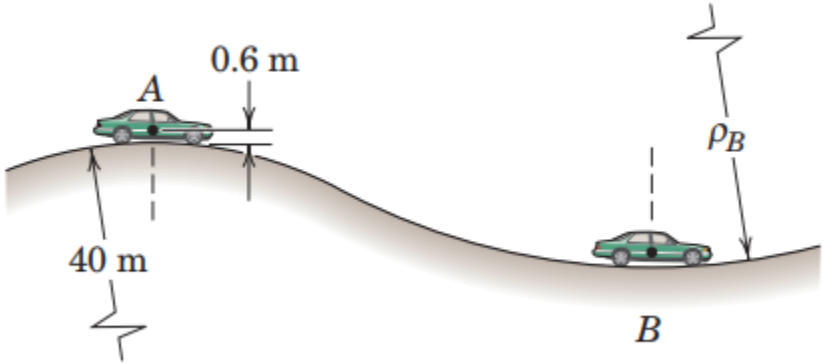


$$\mathbf{a} = 23.8\mathbf{e}_n + 27.1\mathbf{e}_t\ \text{ft/sec}^2$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **تمرین ۱۰۷-۲:**

سرعت خودرویی به صورت یکنواخت از ۵۰ کیلومتر بر ساعت در نقطه A به ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت در نقطه B در مدت ۱۰ ثانیه افزایش می یابد. شعاع انحنا در نقطه A ، ۴۰ متر می باشد. اگر مقدار شتاب کل مرکز جرم خودرو در نقطه A و B برابر باشد مطلوب است محاسبه مؤلفه مماسی شتاب و شعاع انحنا در نقطه B. مرکز جرم خودرو ۰/۶ متر بالاتر از سطح جاده است.



بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **حل:**

با توجه به معلوم بودن سرعت و زمان در نقاط A و B می توان از رابطه ۲ جهت محاسبه شتاب مماسی کمک گرفت. قبل از آن ابتدا سرعت نقاط A و B را بر حسب متر بر ثانیه بدست می آوریم.

1 $v = \frac{ds}{dt}$

2 $a_t = \frac{dv}{dt}$

3 $vdv = a_t ds$

$$v_A = 50\frac{km}{hr} \times \frac{1000\ m}{1\ km} \times \frac{1\ hr}{3600\ s} = \frac{50}{3.6} = 13.88\ m/s$$

$$v_B = \frac{100}{3.6} = 27.77\ m/s$$

$$dv = a_t dt \Rightarrow \int_{13.88}^{27.77} dv = a_t \int_0^{10} dt$$

$$\boxed{a_t = \frac{13.88}{10} = 1.38\ m/s^2}$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **حل:**

با توجه به ثابت بودن شتاب کل و شتاب مماسی در طول مسیر نتیجه می شود مؤلفه عمودی شتاب در دو نقطه A و B با یکدیگر برابر است بنابراین داریم:

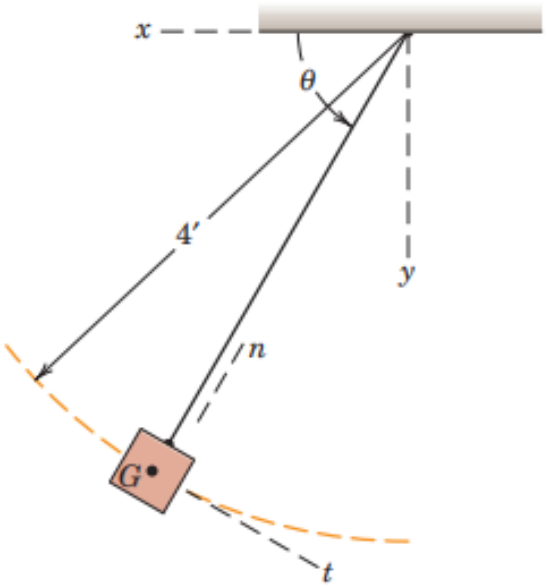
$$a_A = a_B \Rightarrow \cancel{a_A^t} + a_A^n = \cancel{a_B^t} + a_B^n \Rightarrow \frac{v_A^2}{(\rho_A + 0.6)} = \frac{v_B^2}{(\rho_B - 0.6)}$$

$$\frac{50^2}{(40 + 0.6)} = \frac{100^2}{(\rho_B - 0.6)} \Rightarrow \boxed{\rho_B = 163\ m}$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- **تمرین ۱۱۲-۲:**

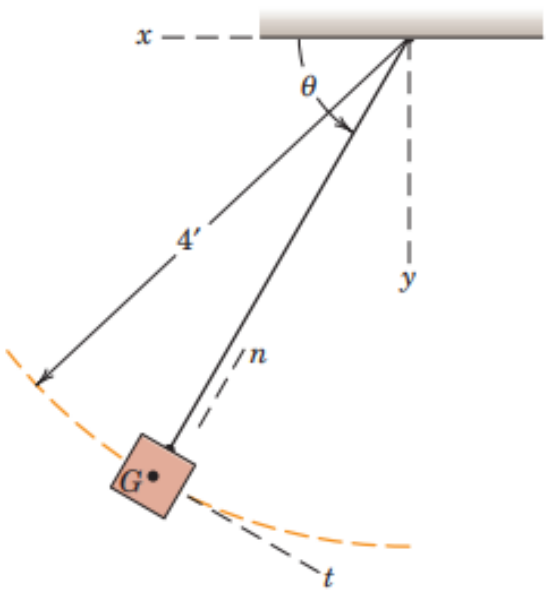
بردار شتاب را برای مرکز جرم پاندول نشان داده شده در شکل زیر در دو دستگاه مختصات x-y و n-t در شرایطی که $\theta = 60$، $\dot{\theta} = 2\,rad/sec$ و $\ddot{\theta} = 4.025\,rad/\sec^2$ بدست آورید.



بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- حل:

مؤلفه های شتاب در دستگاه قائم – مماسی:



$$v = r\dot{\theta}$$
$$a_n = v^2/r = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta} \qquad \textbf{(2/11)}$$
$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta}$$

$$a_t = r\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad a_t = 4 \times 4.025 = 16.1 \ \ ft/s^2$$

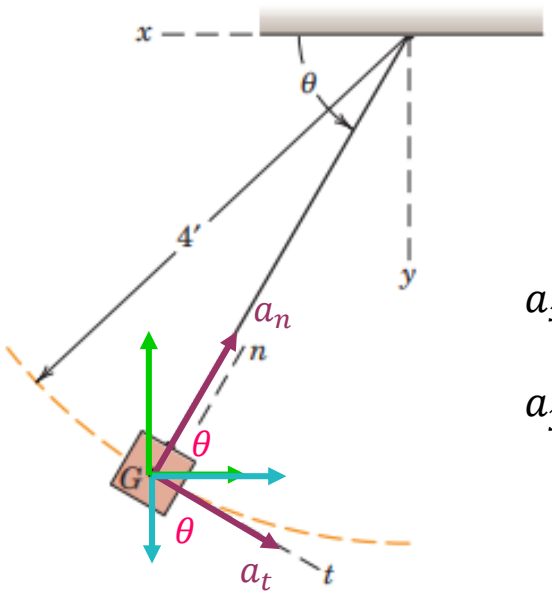
$$a_n = r\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad a_n = 4 \times 2^2 = 16 \ \ ft/s^2$$

$$\boldsymbol{a} = a_n \boldsymbol{e_n} + a_t \boldsymbol{e_t} = 16\boldsymbol{e_n} + 16.1\boldsymbol{e_t}$$

بخش پنجم: دستگاه مختصات قائم – مماسی (n-t)

- حل:

مؤلفه های شتاب در دستگاه کارتزین:



$$\boxed{\boldsymbol{a} = 16\boldsymbol{e_n} + 16.1\boldsymbol{e_t}}$$

$$a_x = -a_n cos\theta - a_t sin\theta = -16cos60 - 16.1sin60 = -21.94\ ft/s^2$$

$$a_y = -a_n sin\theta + a_t cos\theta = -16sin60 + 16.1cos60 = -5.80\ ft/s^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = -21.94i - 5.80j}$$

گروه آموزشی فتحی

امام علی (ع):

خشم هم نشین بسیار بدی است: عیب ها را آشکار، بدی ها را نزدیک و خوبی ها را دور می کند.