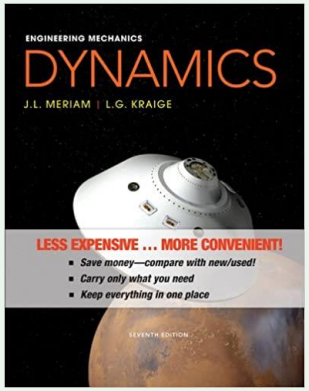
به نام خدا



آموزش دینامیک - جلسه دهم

مدرس: احسان فتحی

مدیر و موسس آموزشگاه آزاد فنی و حرفه‌ای فتحی

Telegram & Instagram: *@FathiTrainingGroup*

Website: *FathiTrainingGroup.com*

Email: *ehsanfathi_eh@yahoo.com*

Tel: *09386249330, 05136210687*

گروه آموزشی فتحی

فصل دوم:

سینماتیک ذرات

گروه آموزشی فتحی

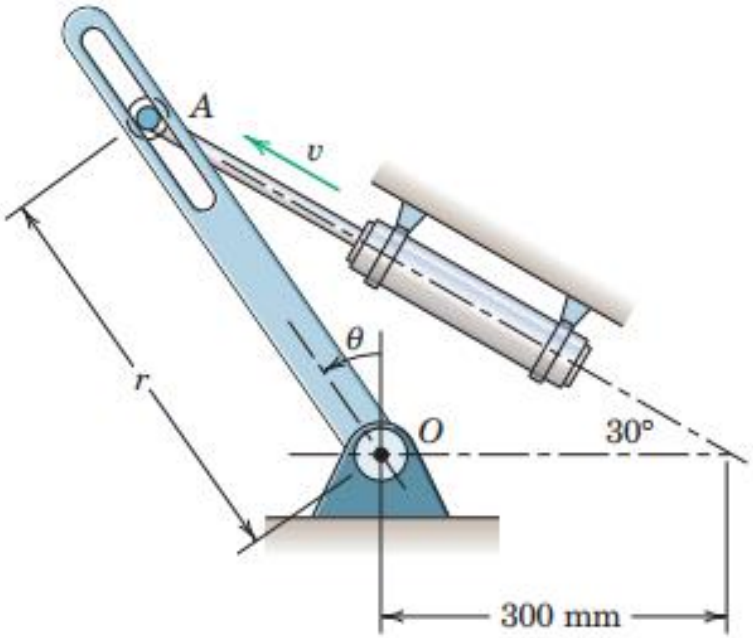
سرفصل مطالب

- مقدمه
- حرکت مستقیم الخط
- حرکت منحنی الخط در صفحه
- دستگاه مختصات دکارتی
- دستگاه مختصات قائم و مماسی
- دستگاه مختصات قطبی
- حرکت منحنی الخط در فضا
- سرعت نسبی
- حرکت مقید ذرات
- تمرین‌های فصل

بخش ششم: دستگاه مختصات قطبی $(r-\theta)$

- **تمرین ۱۵۴-۲:**

سیلندر هیدرولیک نشان داده شده در شکل زیر به پین A سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه را در امتداد محورش می‌دهد که باعث دوران عضو شیاردار OA می‌شود. مقادیر $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ را در لحظه ای که $\theta = 30$ بدست آورید.



بخش ششم: دستگاه مختصات قطبی $(r-\theta)$

- **حل:**

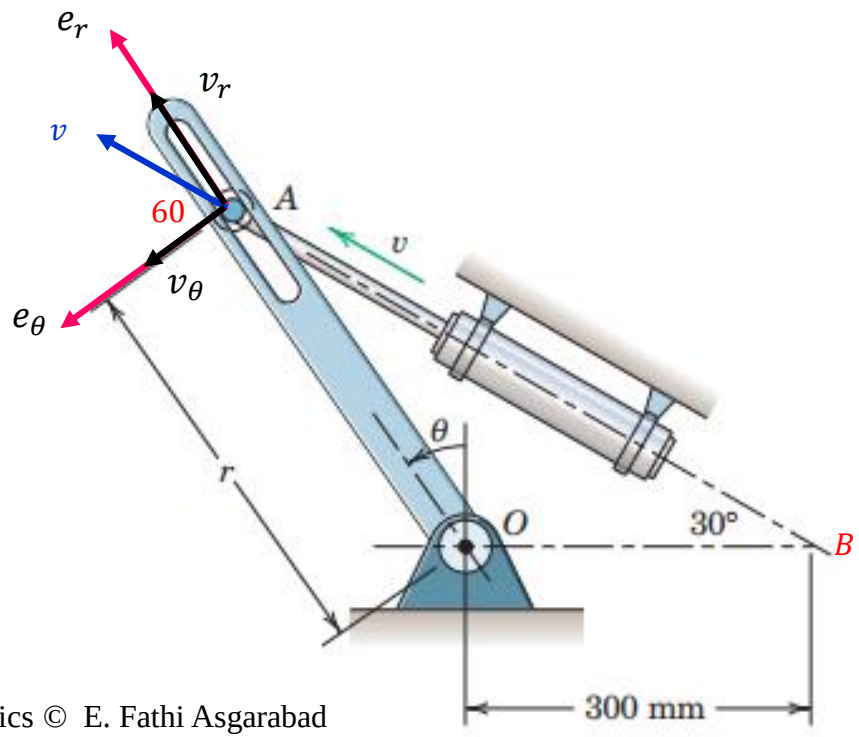
ابتدا مقادیر r ، $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ را بدست می‌آوریم. با توجه به اینکه مثلث AOB متساوی الساقین است می‌توان گفت r=300 mm. برای محاسبه $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ باید سرعت v را در دو راستای r و θ تصویر کرد.

$$r = 300\ mm$$

$$v_r = \dot{r} = 2sin60 = 1.73\ m/s$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 2cos60 = 1\ m/s$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{0.3} = 3.33\ rad/s$$



بخش ششم: دستگاه مختصات قطبی $(r-\theta)$

- **حل:**

با توجه به اینکه سرعت پیستون ثابت است، شتاب در امتداد محور پیستون صفر خواهد بود. بنابراین مؤلفه‌های محیطی و شعاعی شتاب باید به گونه‌ای باشند که هم دیگر را در امتداد محور پیستون خنثی کنند.

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$$

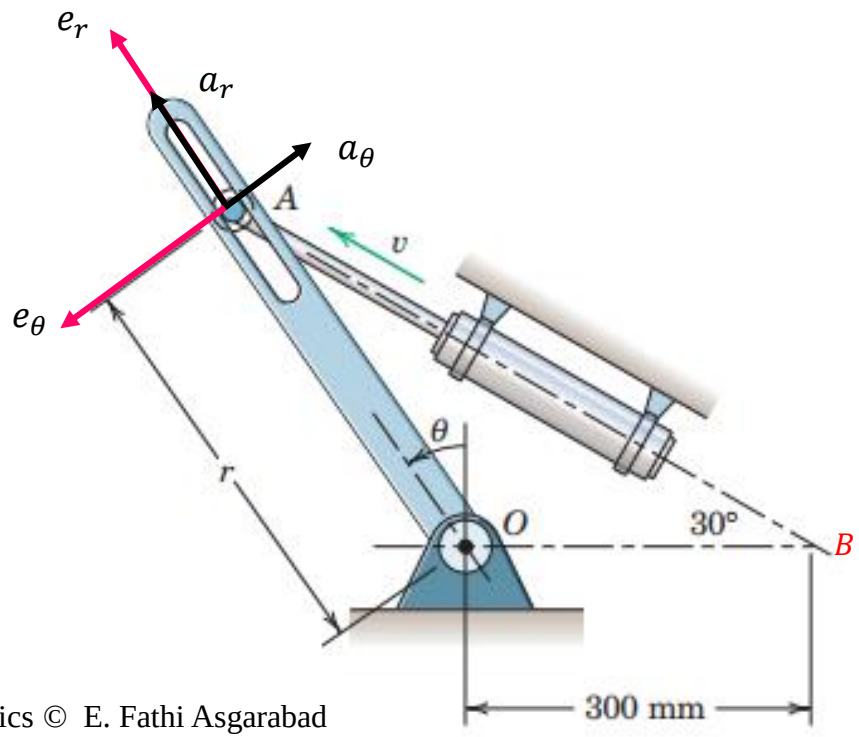
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a_r \cos 30 = a_\theta \cos 60$$

$$a_r \sin 30 = a_\theta sin60$$

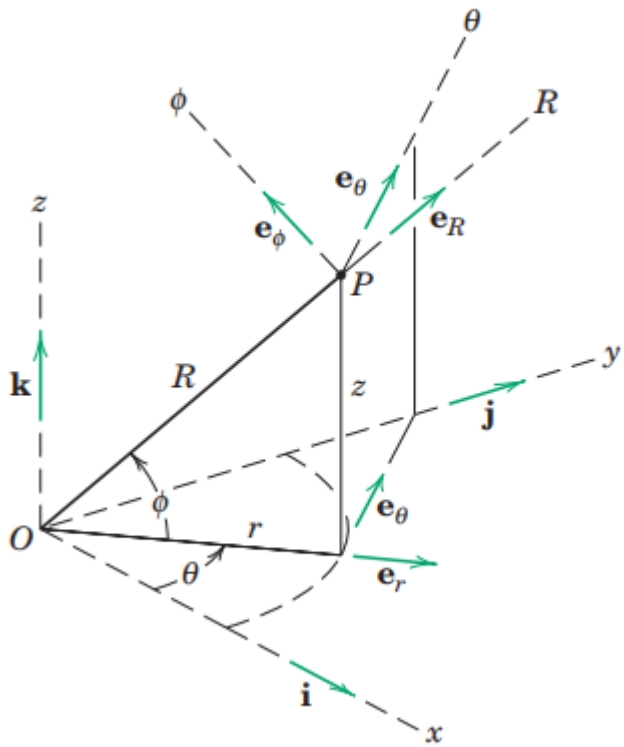
$$\ddot{r} = 3.33\ m/s^2$$

$$\ddot{\theta} = -38.5\ rad/s^2$$



بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

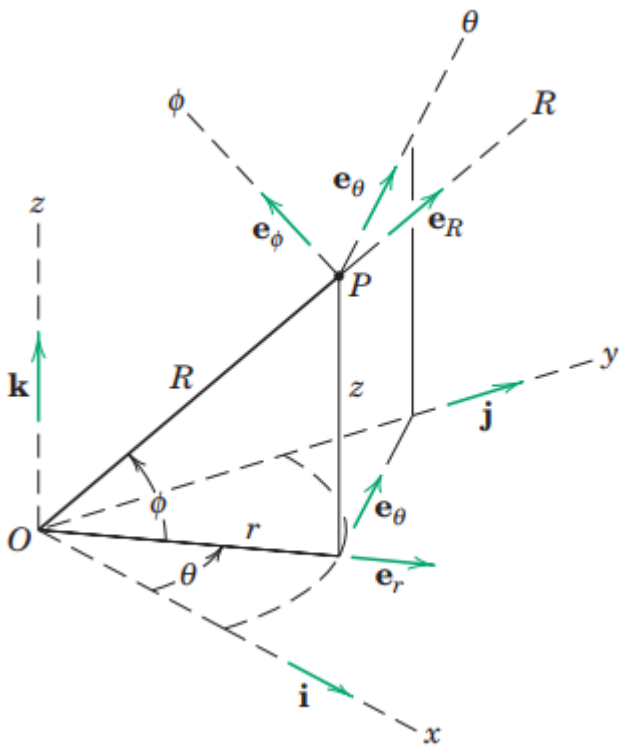
- توصیف حرکت در دستگاه مختصات کارتزین:



$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (2/15)$$

بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

- توصیف حرکت در دستگاه مختصات استوانه‌ای:



$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \qquad (2/16)$$

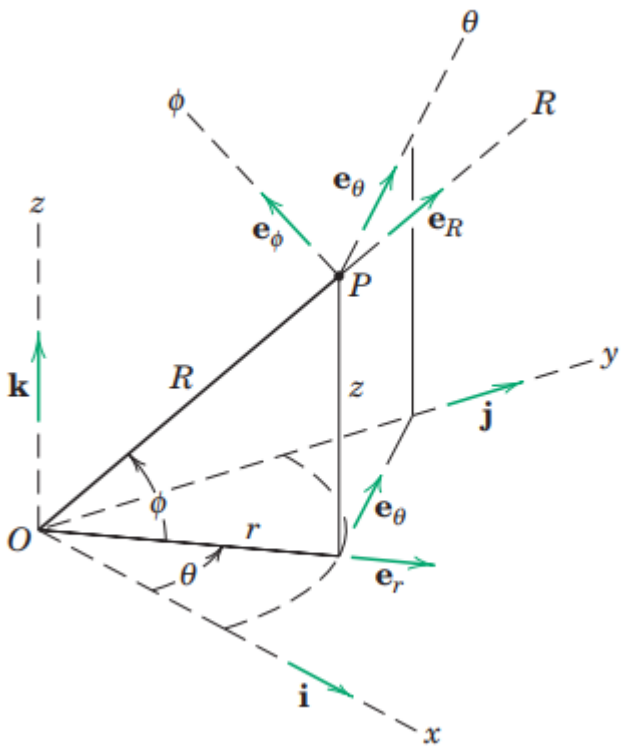
$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v_z = \dot{z}$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \qquad (2/17)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$
$$a_z = \ddot{z}$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

- توصیف حرکت در دستگاه مختصات کروی:



$$\mathbf{v} = v_R\mathbf{e}_R + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi \qquad (2/18)$$

$$v_R = \dot{R}$$
$$v_\theta = R\dot{\theta}\cos\phi$$
$$v_\phi = R\dot{\phi}$$

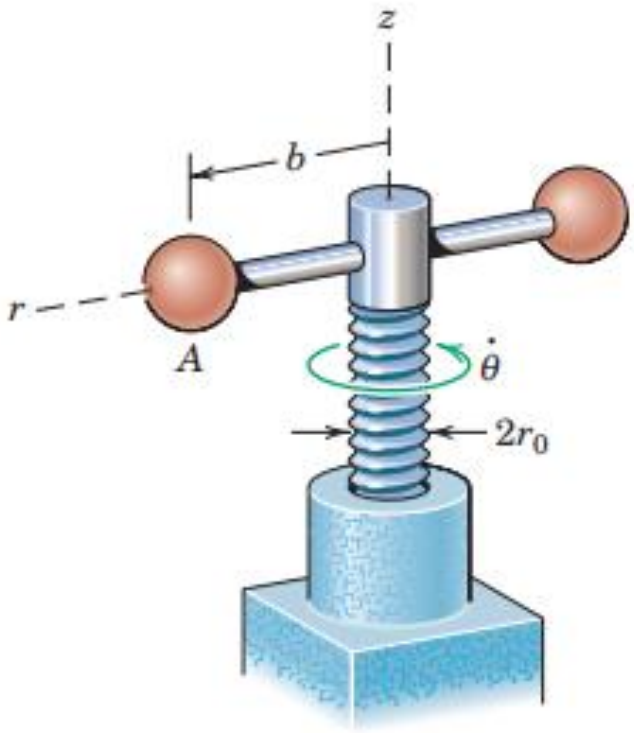
$$\mathbf{a} = a_R\mathbf{e}_R + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi \qquad (2/19)$$

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$$
$$a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$$
$$a_\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$$

بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

- **مسئله نمونه ۱۱-۲:**

پیچ قدرت نشان داده شده در شکل زیر از حالت سکون شروع به چرخش کرده و سرعت آن با زمان رابطه خطی $\dot{\theta} = kt$ می‌سازد که در آن k ثابت است. هنگامیکه پیچ یک دور کامل می‌زند عبارتی را برای سرعت و شتاب گوی A بدست آورد. گام پیچ را L در نظر بگیرید.



بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

- **حل:**

مرکز گوی A روی سطح استوانه‌ای به شعاع b به صورت مارپیچ حرکت می‌کند و موقعیت آن در دستگاه مختصات استوانه‌ای مطابق شکل زیر می‌باشد.

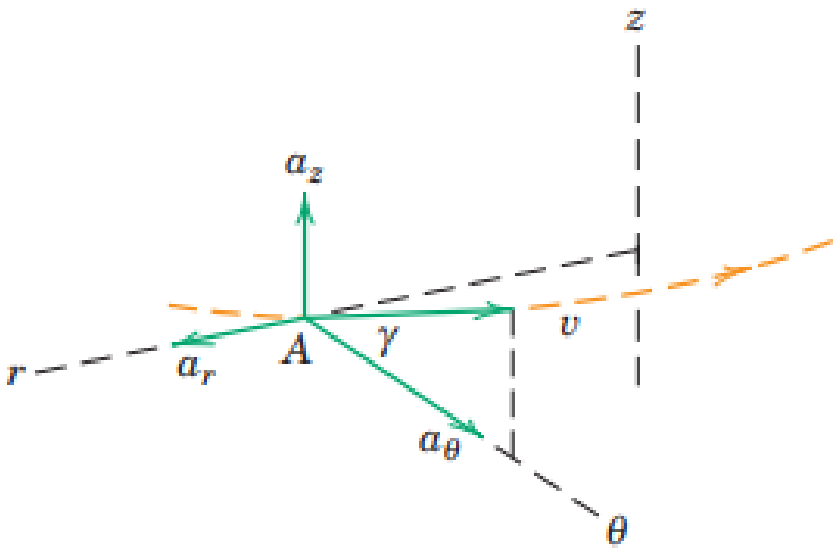
$$\dot{\theta} = kt$$

$$\theta = \Delta\theta = \int \dot{\theta}\, dt = \frac{1}{2}kt^2$$

$$2\pi = \frac{1}{2}kt^2$$

$$t = 2\sqrt{\pi/k}$$

$$\dot{\theta} = kt = k(2\sqrt{\pi/k}) = 2\sqrt{\pi k}$$



بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

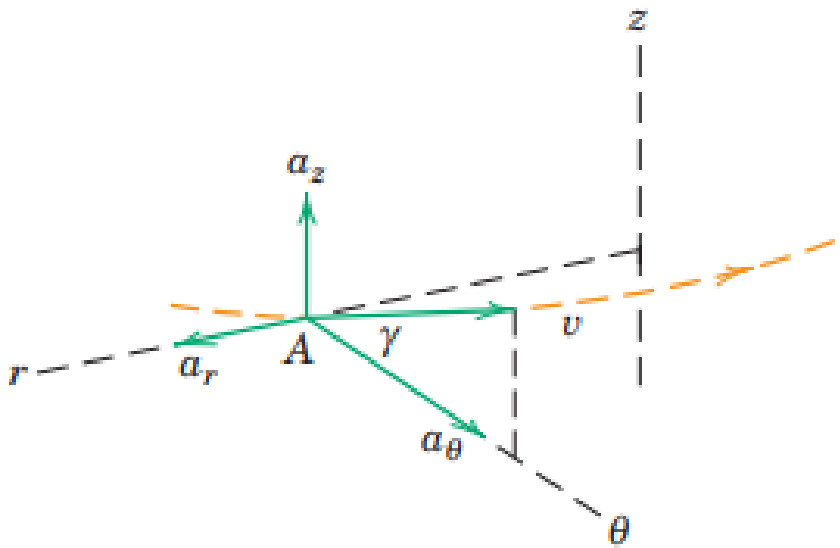
- **حل: محاسبه سرعت:**

زاویه مارپیچ γ به صورت $\tan\gamma = L/(2\pi b)$ قابل محاسبه است که در آن b شعاع استوانه و L طول گام می‌باشد. به کمک این زاویه می‌توان سرعت v را با در اختیار داشتن سرعت v_θ بدست آورد.

$$v = v_\theta/\cos\gamma = b\dot{\theta}/\cos\gamma.$$

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\pi k},$$

$$v = 2b\sqrt{\pi k}\,\frac{\sqrt{L^2 + 4\pi^2 b^2}}{2\pi b} = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\,\sqrt{L^2 + 4\pi^2 b^2}$$



بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

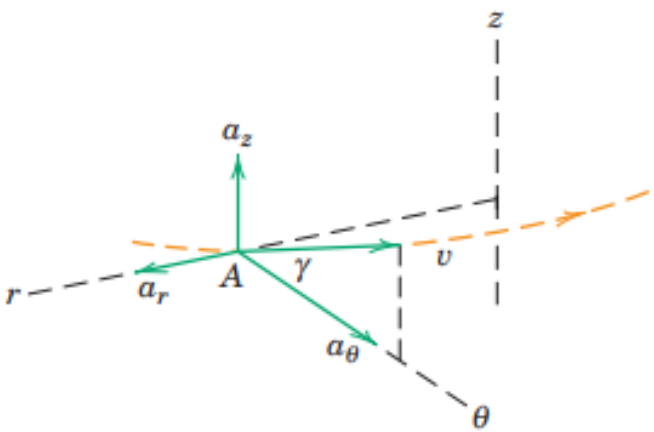
- حل: محاسبه شتاب:

$$[a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \qquad a_r = 0 - b(2\sqrt{\pi k})^2 = -4b\pi k$$

$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \qquad a_\theta = bk + 2(0)(2\sqrt{\pi k}) = bk$$

$$[a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z] \qquad a_z = \frac{d}{dt}(v_z) = \frac{d}{dt}(v_\theta \tan\gamma) = \frac{d}{dt}(b\dot{\theta}\tan\gamma)$$

$$= (b\tan\gamma)\ddot{\theta} = b\frac{L}{2\pi b}k = \frac{kL}{2\pi}$$



$$a = \sqrt{(-4b\pi k)^2 + (bk)^2 + \left(\frac{kL}{2\pi}\right)^2}$$

$$= bk\sqrt{(1 + 16\pi^2) + L^2/(4\pi^2 b^2)}$$

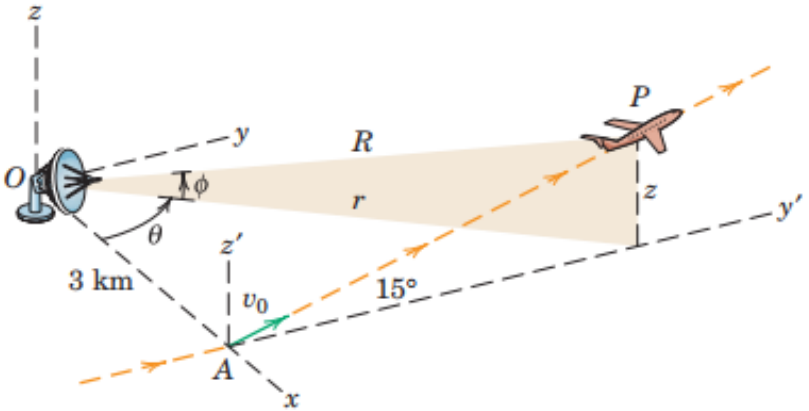
بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

- **مسئله نمونه ۱۲-۲:**

هواپیمای P از نقطه A با سرعت اولیه ۲۵۰ کیلومتر بر ساعت شروع به پرواز می‌کند و با زاویه ثابت ۱۵ درجه و شتاب ۰/۸ متر بر مجذور ثانیه در صفحه z'y' ارتفاع می‌گیرد. مسیر پرواز با راداری در نقطه O کنترل می‌شود.

الف- سرعت هواپیما را ۶۰ ثانیه بعد از شروع پرواز در دستگاه استوانه‌ای بدست آورده و مقادیر $\dot{r}$، $\dot{\theta}$ و $\dot{z}$ را تعیین کنید.

ب- سرعت هواپیما را ۶۰ ثانیه بعد از شروع پرواز در دستگاه کروی بدست آورده و مقادیر $\dot{R}$، $\dot{\theta}$ و $\dot{\varphi}$ را تعیین کنید.



بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

- **حل:**

الف- محاسبه سرعت در دستگاه مختصات استوانه ای:

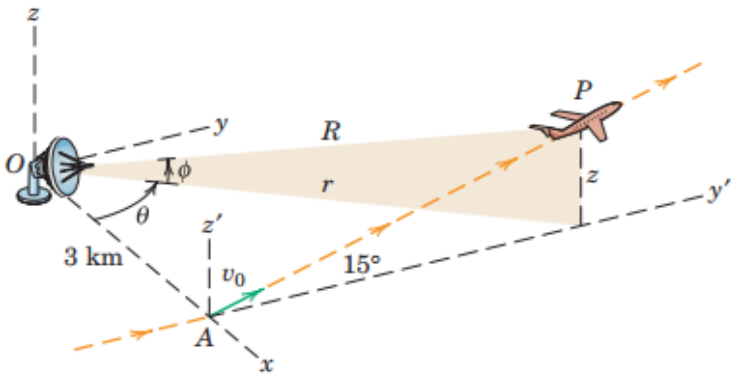
$$v_0 = \frac{250}{3.6} = 69.4 \text{ m/s}$$

$$v = v_0 + at = 69.4 + 0.8(60) = 117.4 \text{ m/s}$$

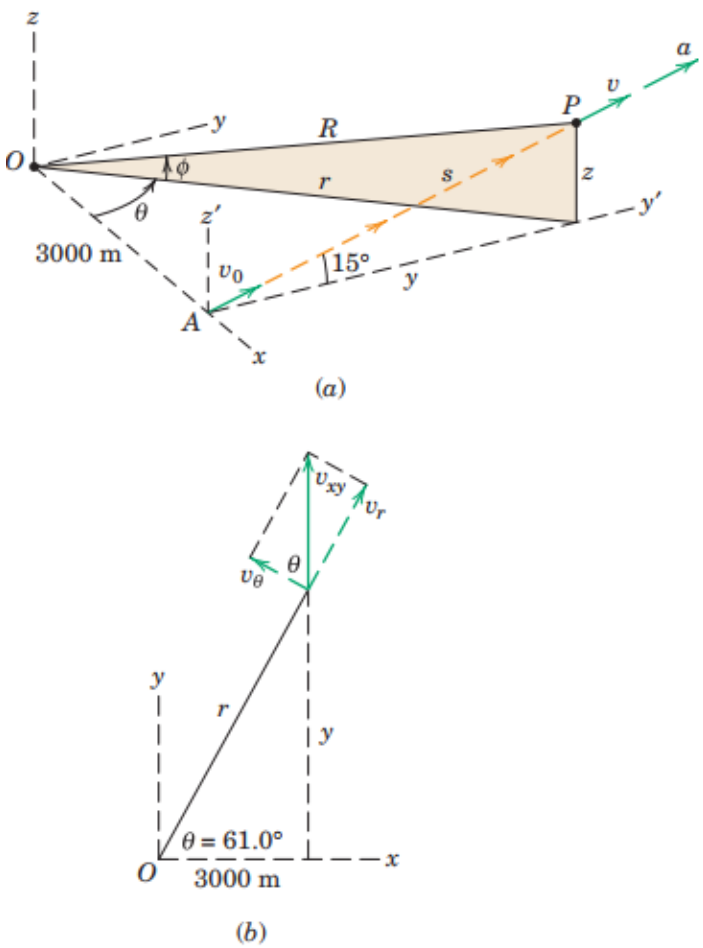
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 69.4(60) + \frac{1}{2}(0.8)(60)^2 = 5610 \text{ m}$$

$$y = 5610 \cos 15° = 5420 \text{ m}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{5420}{3000} = 61.0°$$



بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا



❑ **حل:**

الف- محاسبه سرعت در دستگاه مختصات استوانه ای:

$$r = \sqrt{3000^2 + 5420^2} = 6190 \text{ m}$$

$$v_{xy} = v \cos 15° = 117.4 \cos 15° = 113.4 \text{ m/s}$$

$$v_r = \dot{r} = v_{xy} \sin\theta = 113.4 \sin 61.0° = 99.2 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = v_{xy} \cos\theta = 113.4 \cos 61.0° = 55.0 \text{ m/s}$$

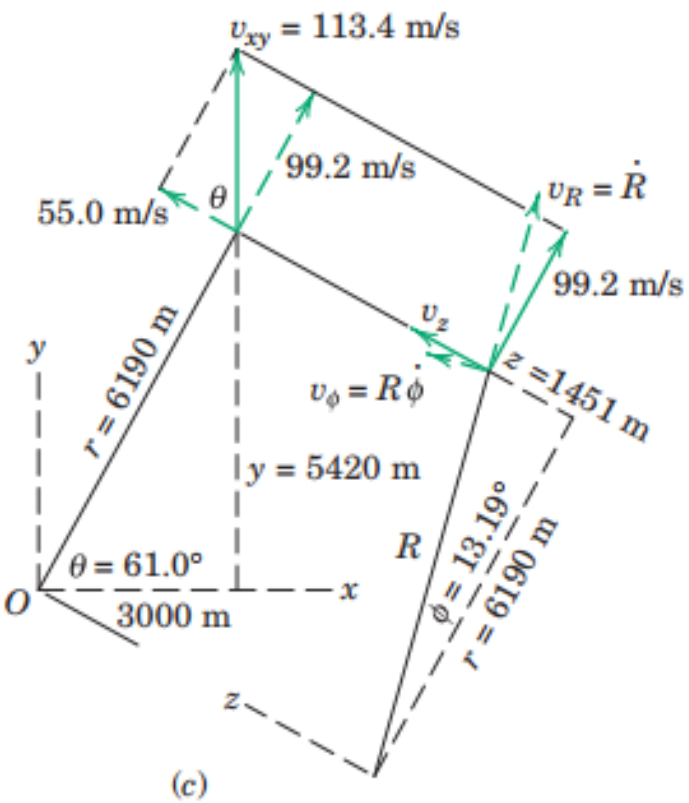
$$\dot{\theta} = \frac{55.0}{6190} = 8.88(10^{-3}) \text{ rad/s}$$

$$\dot{z} = v_z = v \sin 15° = 117.4 \sin 15° = 30.4 \text{ m/s}$$

بخش هفتم: حرکت منحنی الخط در فضا

- **حل:**

ب- محاسبه سرعت در دستگاه مختصات کروی:



$$z = y \tan 15° = 5420 \tan 15° = 1451 \text{ m}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{z}{r} = \tan^{-1}\frac{1451}{6190} = 13.19°$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{6190^2 + 1451^2} = 6360 \text{ m}$$

$$v_R = \dot{R} = 99.2 \cos 13.19° + 30.4 \sin 13.19° = 103.6 \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta} = 8.88(10^{-3}) \text{ rad/s, as in part } (a)$$

$$v_\phi = R\dot{\phi} = 30.4 \cos 13.19° - 99.2 \sin 13.19° = 6.95 \text{ m/s}$$

$$\dot{\phi} = \frac{6.95}{6360} = 1.093(10^{-3}) \text{ rad/s}$$

گروه آموزشی فتحی

پیامبر اکرم (ص):

هر کس بخشی از کار مسلمانان را بر عهده گیرد و در کار آن‌ها مانند کار خود دلسوزی نکند، بوی بهشت را استشمام نخواهد کرد.