بررسی تغییر شکل یک ورق مستطیلی در اثر اعمال ممان‌های لبه‌ای

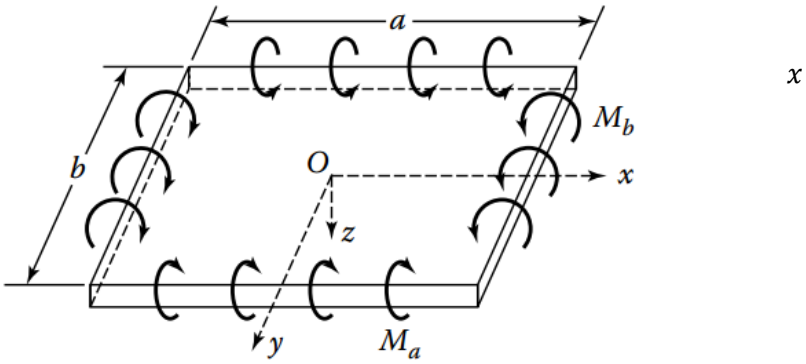
ورق مستطیلی شکل ۱ در معرض ممان گسترده یکنواخت $M_x = M_b$ و $M_y = M_a$ قرار گرفته است. معادله حاکم بر خیز سطح را برای دوحالت زیر استخراج کنید. سپس مسئله را با نرم افزار آباکوس مدل کرده و نتایج را با تئوری مقایسه کنید.

الف) $M_a = M_b = 1000\ N.m$

ب) $M_a = -M_b = 1000\ N.m$

داده‌ها:

$$b = 1\,m\,, \qquad a = 2\,m, \qquad \vartheta = \frac{1}{3}, \qquad E = 200GPa, \qquad t = 0.01\,m,$$



شکل ۱: هندسه و شرایط بارگذاری در ورق

Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering
Telegram: @FathiTrainingGroup
Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: FathiTrainingGroup.com
Tel: 09386249330 – 05136210687
Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran

« حل تئوری »

معادلات خمش در ورق:

برای حل این ورق از رابطه گشتاور خمشی حول محور x و y استفاده می‌شود. این گشتاور به صورت زیر می‌باشد:

$$M_x = -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y = -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (۱)$$
$$M_{xy} = -D(1-\nu)\kappa_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

عبارت D سختی خمشی ورق نام دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (۲)$$

در این روابط D سختی خمشی ورق، E مدول یانگ، t ضخامت ورق، ϑ ضریب پواسون، w خیز و k انحنای ورق می‌باشد. مقدار D با قرار دادن مقادیر داده شده ۱۸۷۰۳ بدست می‌آید.

شرایط مرزی برای ورق با تکیه گاه ساده:

اگر مبدا در مرکز ورق در نظر گرفته شود داریم:

$$w(x,y) = 0\ , \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

محاسبه خیز ورق:

از جایگذاری $M_x = M_b$ و $M_y = M_a$ در معادلات ۱ به دست می آید:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_b - \nu M_a}{D(1-\nu^2)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_a - \nu M_b}{D(1-\nu^2)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (۳)$$

Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering
Telegram: @FathiTrainingGroup
Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: FathiTrainingGroup.com
Tel: 09386249330 – 05136210687
Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran

انتگرال گیری از روابط فوق می‌دهد:

$$w = -\frac{M_b - \nu M_a}{2D(1-\nu^2)}x^2 - \frac{M_a - \nu M_b}{2D(1-\nu^2)}y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 \qquad (۴)$$

اگر مبدأ xyz در مرکز و در سطح میانی ورق تغییر شکل یافته واقع باشد، ثابت‌های انتگرال‌گیری حذف می‌شود و خواهیم داشت:

$$w = -\frac{M_b - \nu M_a}{2D(1-\nu^2)}x^2 - \frac{M_a - \nu M_b}{2D(1-\nu^2)}y^2 \qquad (۵)$$

الف) با گذاشتن $M_a = M_b$ در معادله فوق داریم:

$$w = -\frac{M_b}{2D(1+\vartheta)}(x^2 + y^2)$$

مقدار خیز ماکزیمم ورق در $x = \pm 1$ و $y = \pm 0.5$ برابر ۰.۰۲۵- متر بدست می آید.

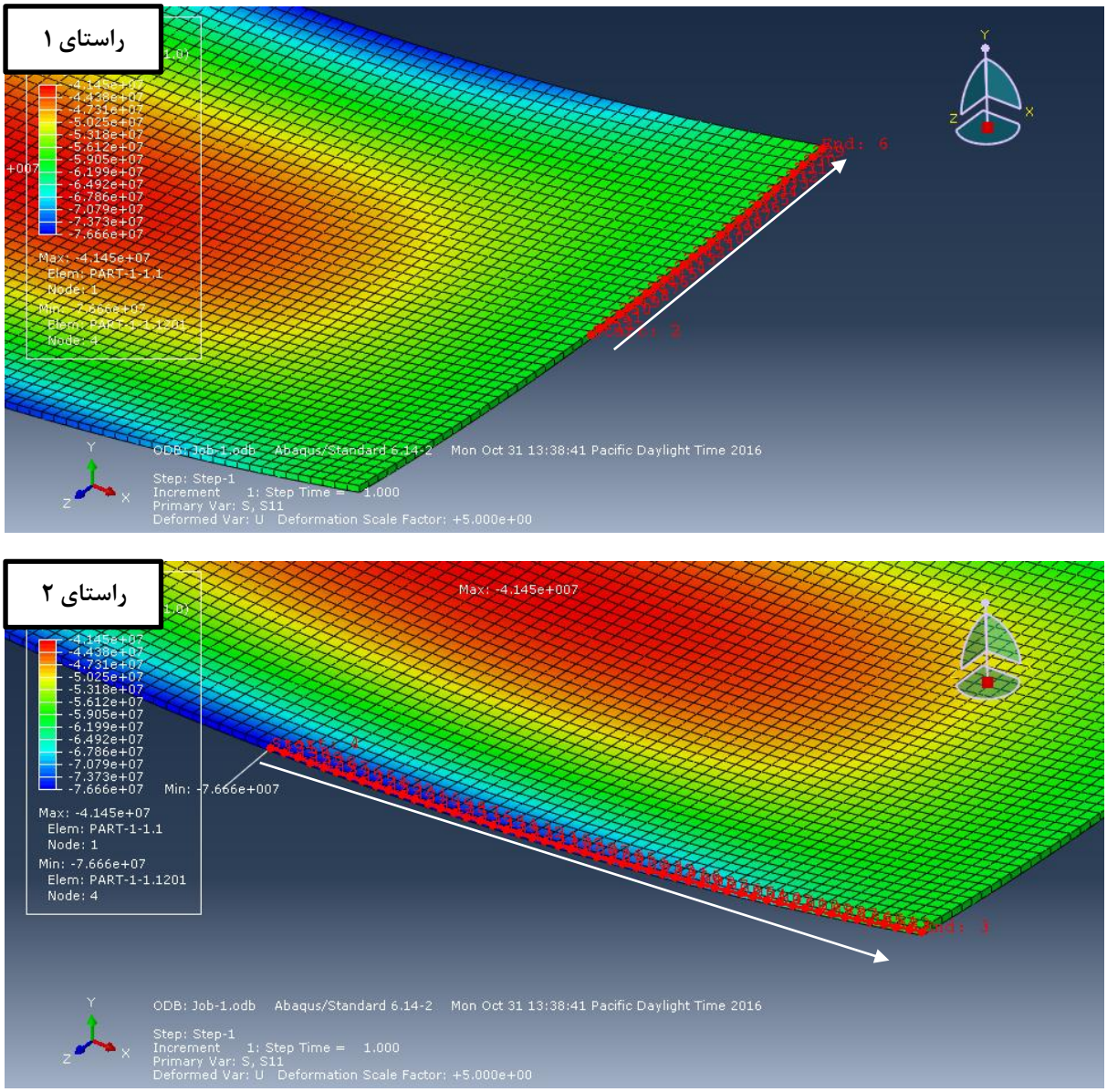
ب) با گذاشتن $M_a = -M_b$ در معادله فوق داریم:

$$w = -\frac{M_b}{2D(1-\vartheta)}(x^2 - y^2)$$

مقدار خیز ماکزیمم ورق در $x = \pm 1$ و $y = 0$ برابر ۰.۰۳۹ متر بدست می آید.

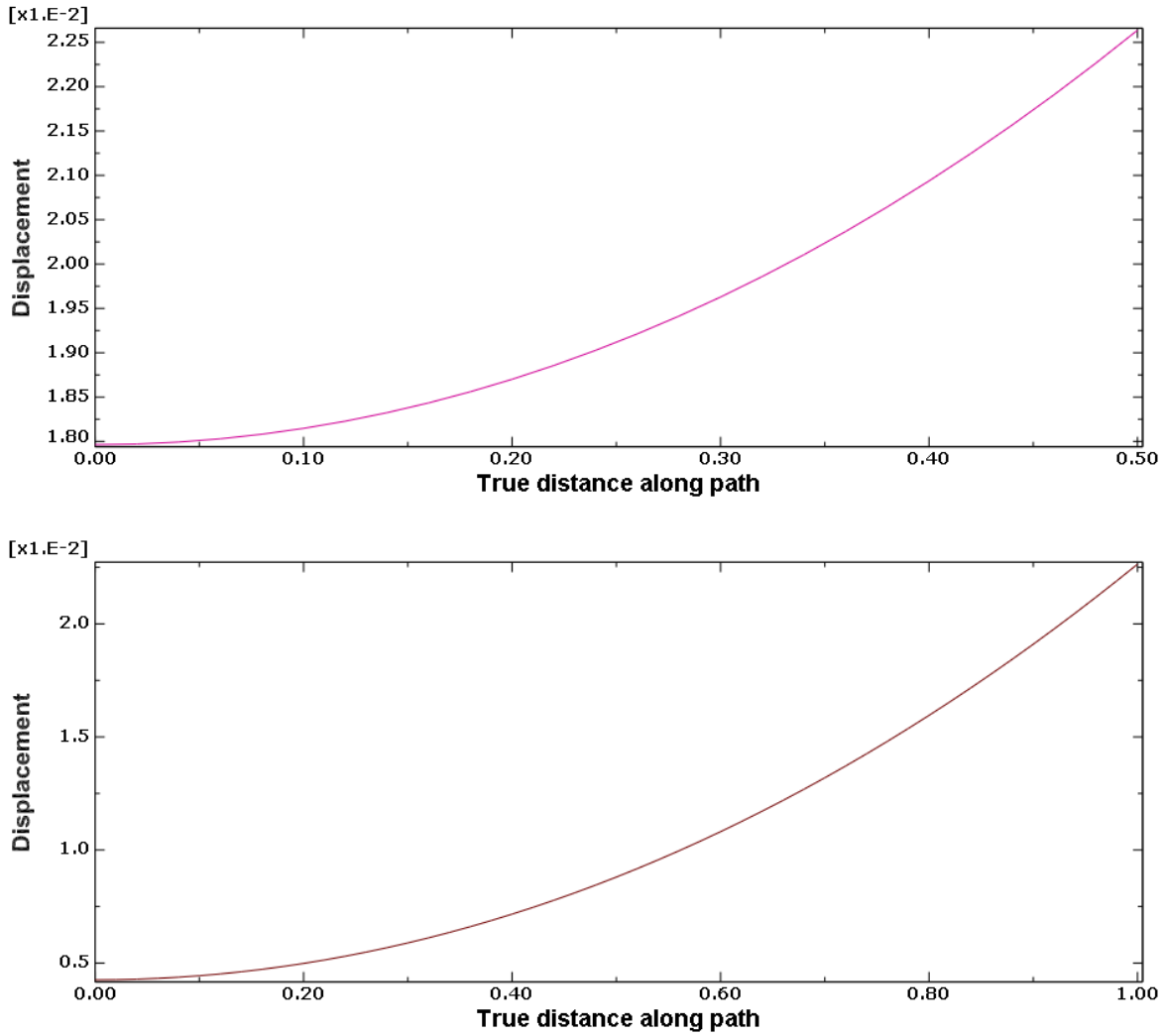
Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering
Telegram: @FathiTrainingGroup
Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: FathiTrainingGroup.com
Tel: 09386249330 – 05136210687
Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran

« مقایسه نتایج »



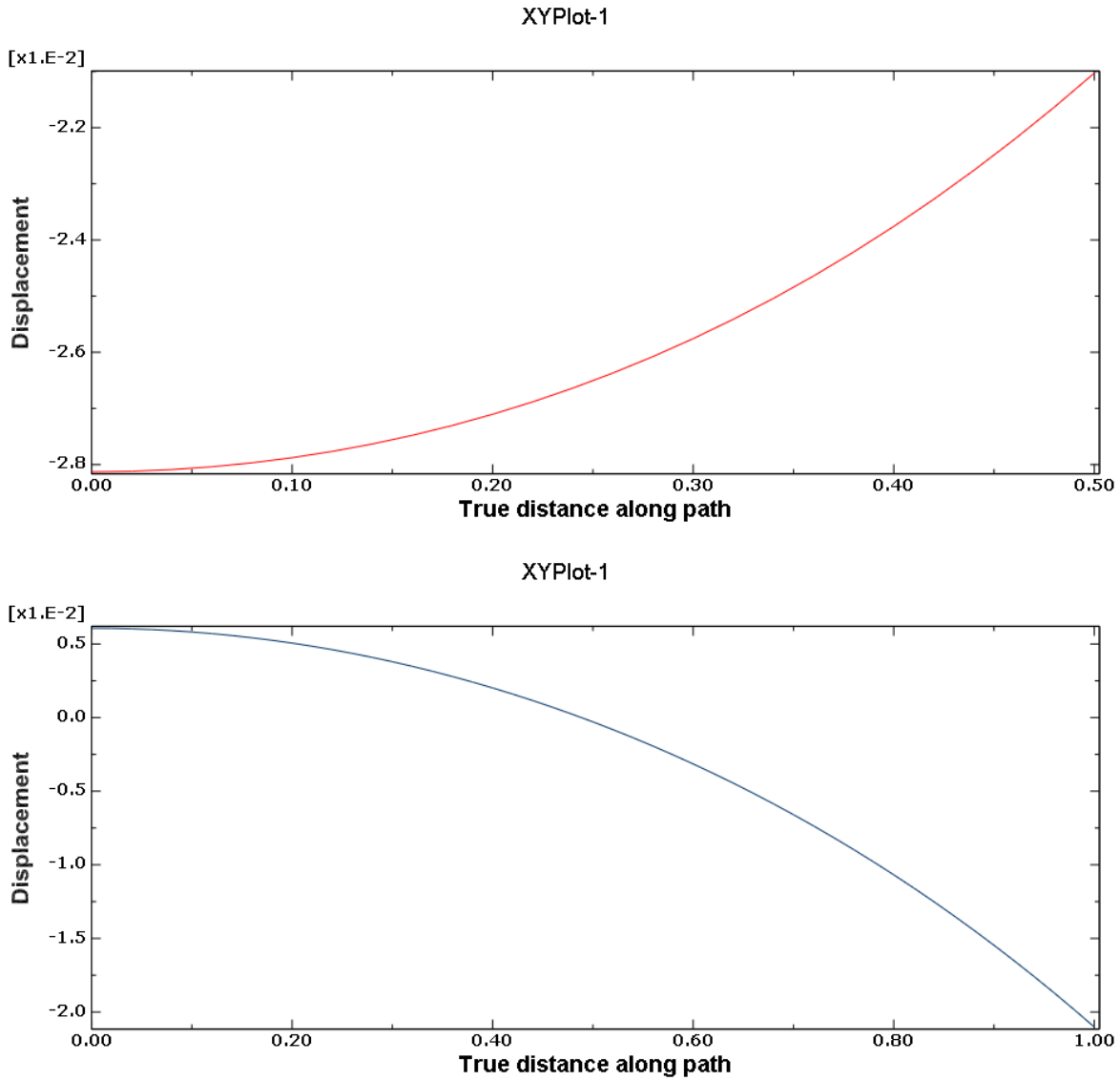
شکل ۲: نمایش تغییر شکل ورق در حالت اول الف) راستای ۱، ب) راستای ۲

Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering
Telegram: @FathiTrainingGroup
Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: FathiTrainingGroup.com
Tel: 09386249330 – 05136210687
Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran



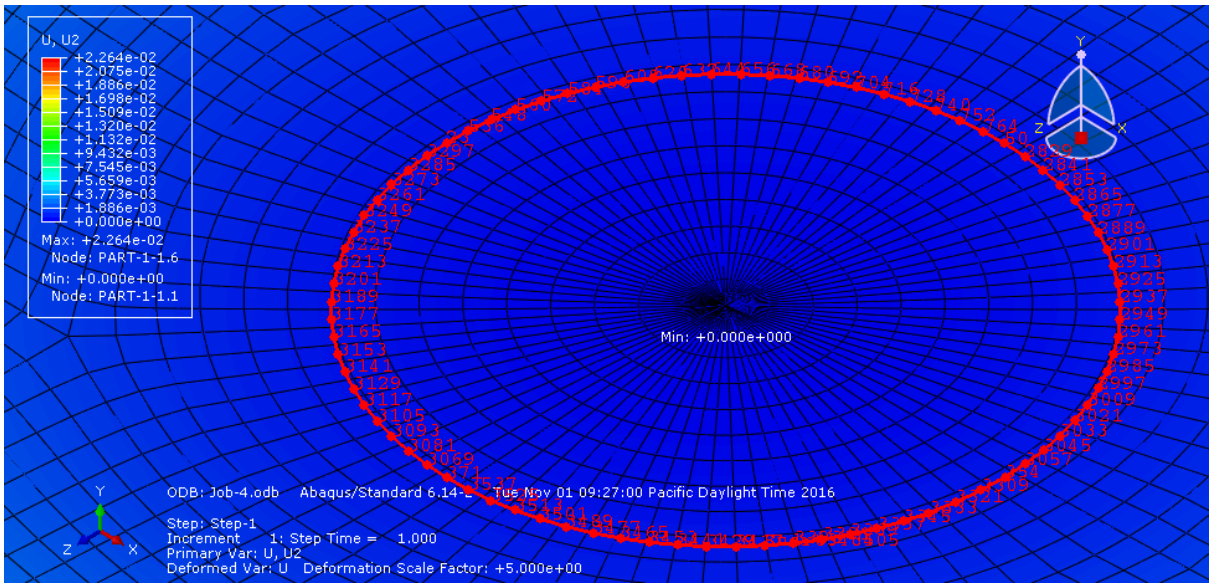
شکل ۳: منحنی خیز ورق در راستای ۱ و ۲ در حالت اول

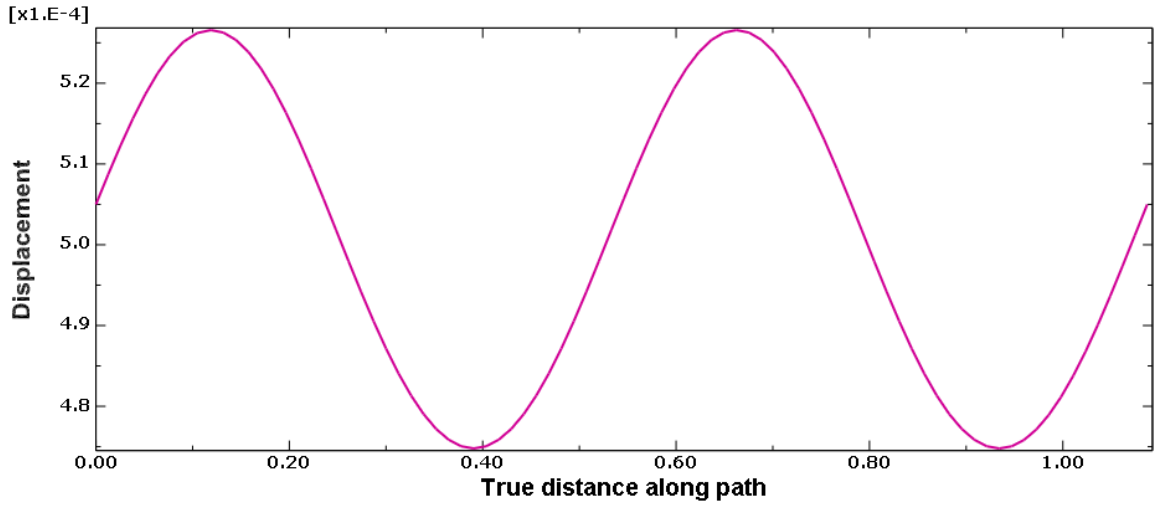
Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering
Telegram: @FathiTrainingGroup
Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: FathiTrainingGroup.com
Tel: 09386249330 – 05136210687
Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran



شکل ۴: منحنی خیز ورق در راستای ۱ و ۲ در حالت دوم

Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering
Telegram: @FathiTrainingGroup
Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: FathiTrainingGroup.com
Tel: 09386249330 – 05136210687
Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran

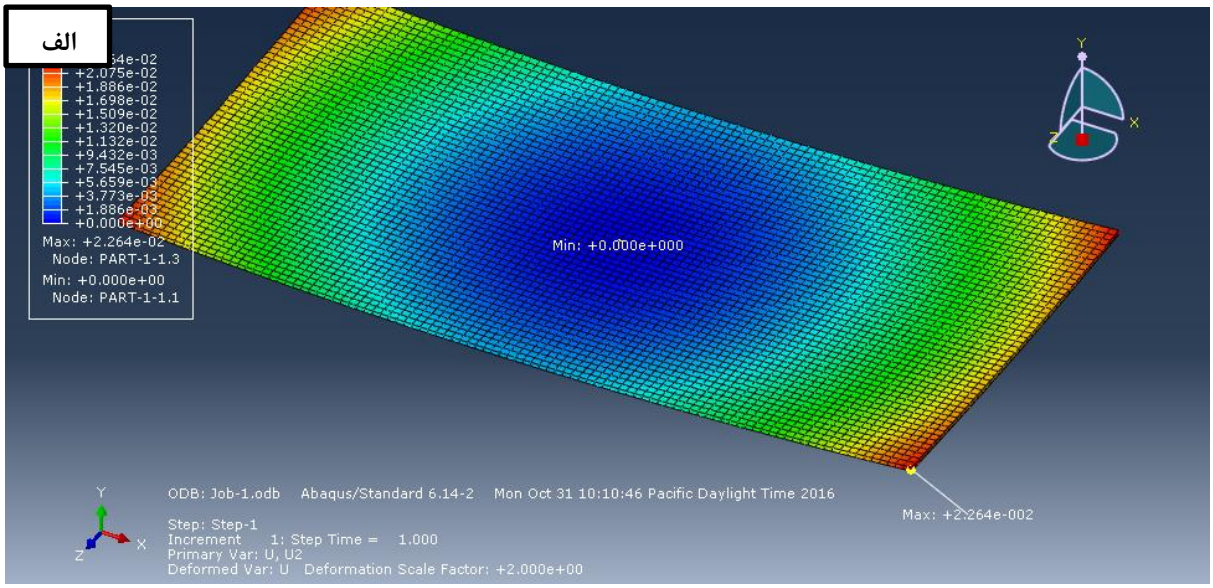


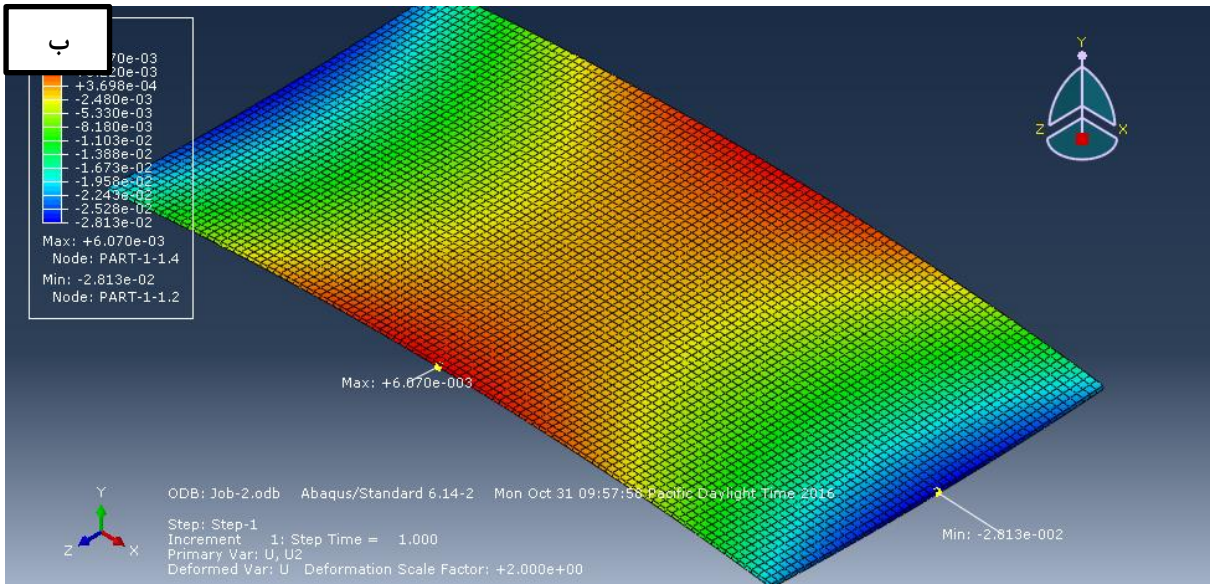


شکل ۵: منحنی خیز ورق در مسیر دایروی

Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering
Telegram: @FathiTrainingGroup
Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: FathiTrainingGroup.com
Tel: 09386249330 – 05136210687
Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran

« حل اجزاء محدود »





شکل ۶: نمایش حالت تغییرمکان الف) دایروی، ب) هذلولوی

Teacher: Ehsan Fathi, PhD in Mechanical Engineering
Telegram: @FathiTrainingGroup
Email: Ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: FathiTrainingGroup.com
Tel: 09386249330 – 05136210687
Address: No. 328, Seyyed Razi 34 St, Mashhad, Iran